Concours blanc – épreuve supplémentaire

[CS22]
4 heures
Calculatrice autorisée

Objectif

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur intégral U défini sur un espace préhilbertien réel E. Cet espace et son produit scalaire sont introduits dans la partie II et l'opérateur U est étudié dans la partie III. Dans la partie IV, on s'intéresse à l'étude d'une famille d'équations différentielles à un paramètre pour lesquelles on recherche des solutions développables en séries entières. Enfin, la partie V fait le lien entre les vecteurs propres de l'endomorphisme U et les solutions des équations différentielles trouvées dans de la partie IV.

Liens entre les différentes parties

- Les parties I et II sont très largement indépendantes à l'exception de la définition de la fonction k_x.
- La partie III utilise les résultats de la partie II ainsi que la condition d'appartenance à E établie dans la partie I.
- La partie IV fait ponctuellement appel à l'espace E défini et étudié dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.
- La partie V utilise les résultats des parties III et IV ainsi que le résultat de la question 3.

Notations

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note p_α la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^\alpha. \end{array}\right.$$

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E

I.A – *Des fonctions de E utiles pour la suite*

Q1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, p^α appartient à E.

Q2. Soit P une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de P à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à E si et seulement si $P(0) = 0$.

Q3. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a\,e^t + b \end{array}\right.$$

appartient à E si et seulement si $a = b = 0$.

Q4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (e^t - 1)^2\,\dfrac{e^{-t}}{t} \end{array}\right.$$

est intégrable sur $]0, x]$.

Q5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$ où $\min(x, t)$ désigne le plus petit des réels x et t. Représenter graphiquement la fonction k_x. Montrer que k_x appartient à E.

I.B – *Une condition suffisante d'appartenance à E*

Dans cette sous-partie, on suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0, \\ \exists C > 0; \forall x > 0,\ |f(x)| \leqslant C\sqrt{x}. \end{cases}$$

Q6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x} - \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$ et que, pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) \geqslant 0$. En déduire que $\Phi(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

Q7. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$|f(x)| \leqslant 4C\,\frac{\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x}.$$

Q8. En déduire que $f \in E$.

II Structure préhilbertienne de E

Q9. Montrer que, si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q10. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toutes fonctions $f \in E$ et $g \in E$, on pose,

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Q11. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par

$$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Q12. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \|k_x\| = 0$. On rappelle que, pour tout $x > 0$, $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$.

Q13. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \,\mathrm{d}t = k!$$

Q14. On rappelle que les fonctions p^α ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

III Un opérateur sur E

À chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par

$$U(f)(x) = \langle k_x \,|\, f \rangle = \int_0^{+\infty} (e^{\min(x,t)} - 1)\, f(t)\, \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

III.A –

Q15. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(f)(x) = 0.$$

Q16. Montrer que pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$U(f)(x) = \int_0^x (1-e^{-t})\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + (e^x - 1)\int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Q17. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x > 0$,

$$(U(f))'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction $U(f)$ est notée $U(f)'$.

Q18. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}. \tag{III.1}$$

Q19. Montrer que pour tout $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$|U(f)'(x)| \leqslant e^x \,\|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|f\|\,\frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

Q20. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$,

$$|U(f)(x)| \leqslant 4\,\|f\|\,\frac{\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x}.$$

Q21. En déduire que

$$\|U(f)\| \leqslant 4\,\|f\|\,.$$

Q22. Montrer que U est injectif.

Q23. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

III.B – On fixe deux fonctions f et g de E. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = -U(f)'(x)\,e^{-x}.$$

Q24. Vérifier que F est une primitive de $x \mapsto f(x)\,\dfrac{e^{-x}}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Q25. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|F(x)\,U(g)(x)| \leqslant 4\,\frac{\|f\|\,\|g\|}{1+x}.$$

Q26. Montrer que pour tout $x \in \,]0,1]$,

$$|F(x)| \leqslant \|f\|\,(e^{-1} - \ln(x))^{1/2}.$$

On pourra utiliser la question 19.

Q27. Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto F(t)\,U(g)(t)$.

Q28. Montrer que

$$\langle f \,|\, U(g) \rangle = \int_0^{+\infty} U(f)'(t)\,U(g)'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Q29. En déduire que $\langle f \,|\, U(g) \rangle = \langle U(f) \,|\, g \rangle$.

IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Pour $p \in \mathbb{R}^*$ on note (E_p) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$

$$x\,(y'' - y') + p\,y = 0. \tag{E_p}$$

Q30. Soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\,x^n$ a un rayon de convergence infini. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ est solution de (E_p) si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ n\,(n+1)\,a_{n+1} = (n-p)\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

IV.A – ***Recherche de solutions polynomiales***

Q31. Montrer que (E_p) possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de (E_p) sont de degré p et appartiennent à l'espace vectoriel E.

On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.

Dans la suite de cette sous-partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ soit solution de l'équation (E_p). L'objectif est de déterminer une expression simple de P en fonction du paramètre p.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $h(x) = e^{-x}\,P(x)$.

Q32. Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle $x\,(y''+y')+p\,y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q33. Justifier que la fonction h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de h. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,x^n$. On peut montrer, de la même façon qu'à la question 30 (cette démonstration n'est pas demandée), que ces coefficients vérifient

$$\begin{cases} b_0=0, \\ n\,(n+1)\,b_{n+1}=-(n+p)\,b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Q34. Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$b_n=\frac{(-1)^{n-1}\,(n+p-1)!}{p!\,n!\,(n-1)!}\,b_1.$$

Q35. On pose $g_p(x)=x^{p-1}\,e^{-x}$. Justifier que $g_p^{(p)}$ est développable en série entière et déduire de la question 34 que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$P(x)=C\,x\,e^x\,g_p^{(p)}(x)$$

où C est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de b_1 et de p.

IV.B – ***Solutions développables en séries entières non polynomiales***

Dans toute cette sous-partie, on fixe un réel p non nul et on suppose que $p\notin\mathbb{N}^*$.

Q36. Justifier l'existence de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non identiquement nulles telles que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\,x^n$ ait un rayon de convergence infini et telles que la fonction $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ soit solution de (E_p).

On fixe une telle série entière et on pose pour $x>0$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n.$$

Q37. Montrer qu'il existe un entier naturel $q>p$ tel que, pour tout entier $n\geqslant q$,

$$|a_{n+1}|\geqslant\frac{|a_n|}{2\,(n+1)}.$$

Q38. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant q$,

$$|a_n|\geqslant\frac{q!\,|a_q|}{2^{n-q}\,n!}.$$

Q39. Montrer que la fonction

$$\psi\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\,x^n \end{array}\right.$$

n'est pas un élément de E.

Q40. En déduire enfin que la fonction f n'est pas un élément de E.

V Éléments propres de U

Q41. Le nombre réel 0 est-il valeur propre de U ?

Q42. Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. On suppose que λ est valeur propre de U. Soit f un vecteur propre associé. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E_{1/\lambda})$.

On suppose que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire qu'il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence infini telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n.$$

Q43. Montrer que les seules valeurs propres possibles de U sont de la forme $\lambda=1/p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$.

Q44. Soit P une solution polynomiale non nulle de (E_p). Démontrer que la fonction $p\,U(P)-P$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y''-y'=0$.

Q45. Montrer que P est un vecteur propre de U pour la valeur propre $1/p$.

Q46. Pour tout entier $p\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$, on pose $P_p(x)=x\,e^x\,g_p^{(p)}(x)$, où $g_p(x)=x^{p-1}\,e^{-x}$. On rappelle que P_p est une fonction polynomiale de degré p et que $P_p\in E$. Montrer que les polynômes P_p sont deux à deux orthogonaux dans E.

• • • FIN • • •