

Sixième devoir surveillé

Durée : 3 heures
Les calculatrices sont interdites

Exercice 1
 [E3A18]

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

- (1) $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (2) $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \lambda \geq 0$
- (3) $\exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha + 1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E .

2.1. Déterminer les éléments propres de J . En déduire ceux de M .

2.2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\text{rg}(M) \geq n - 1$.

3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A .

3.1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a .

On notera pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i .

3.2. Soit b l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b(u_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i.$$

Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Démontrer que : $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(b)$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \implies a_{ij} < 0).$$

a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question 3.2.

4.1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.

4.1.1. Montrer que l'on a aussi : $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$.

4.1.2. Conclure en utilisant le produit scalaire

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \right\rangle.$$

4.2. Prouver que : $\text{rg}(A) \geq n - 1$.

Exercice 2
 [E3A18]

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ , $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \end{aligned}$$

1. Montrer de deux manières différentes que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Déterminer la valeur du réel α .

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X .

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r , montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

7. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{ij} = \mathbb{P}([(X, Y) = (i, j)]).$$

7.1. Déterminer le rang de la matrice B .

7.2. Déterminer la valeur de $\text{Tr}(B)$, la trace de la matrice B .

Exercice 3

[E3A22]

On pose pour tout réel x , lorsque cela est possible,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} dt.$$

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que :

$$\forall t \geq 0, 0 \leq |\sin(t)| \leq t.$$

2.1.2. Montrer que :

$$\forall t > 0, 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leq t e^{-at}.$$

2.1.3. Montrer que :

$$\forall t > 0, 0 \leq \sin^2(t) e^{-xt} \leq e^{-at}.$$

2.2. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

3.1. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, |e^{(i\theta-x)t}| = e^{-xt}.$$

3.2. En déduire que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{(i\theta-x)t}| = 0.$$

3.3. Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2 + 4)}.$$

On pourra utiliser la formule d'Euler :

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

4. Une autre expression de f

4.1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.2. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

4.3. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t) = t \ln(t^2 + 4) - 2t + 4 \arctan\left(\frac{t}{2}\right).$$

4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt.$$