

Première feuille d'exercices

SUITES NUMÉRIQUES

1 Étudier la convergence de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$.

2 Soit la suite (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Exprimer F_n en fonction de $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ et de n .

2. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de F_{2p} la somme

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{5^k} \binom{2p+1}{2k}.$$

3 Considérons la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$. Déterminer u_n en fonction de n .

4 Soit a un réel strictement positif. Considérons la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

1. Introduisons la suite auxiliaire de terme général

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis v_n en fonction de n .

2. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5 Considérons la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}.$$

1. Montrer que la suite u est croissante et majorée. Que peut-on en déduire ?

2. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! \theta_n \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad u_n = \cos \theta_n.$$

Exprimer θ_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite u .

3. Montrer que la suite de terme général $\prod_{k=1}^n u_k$ converge et donner sa limite.

6 Considérons les suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 1}$, $v = (v_n)_{n \geq 1}$ et $w = (w_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_n = u_n - 2\sqrt{n+1}, \\ w_n = u_n - 2\sqrt{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que v et w sont adjacentes.

2. En déduire un équivalent de u_n quand n augmente.

7 CCP

1. Montrer que deux suites réelles (u_n) et (v_n) , équivalentes en $+\infty$, ont le même signe à partir d'un certain rang.

2. Au voisinage de $+\infty$, quel est le signe de

$$u_n = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n} \right) - \tan \left(\frac{1}{n} \right) ?$$

8 CCP

Soit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} (z_n + |z_n|).$$

1. Donner le module et l'argument de z_n en fonction de ceux de z_0 .

2. Construire géométriquement z_{n+1} en fonction de z_n .

3. Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

9 MP

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

10 AM

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On lui associe la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

1. Montrer que si u converge vers 0, v aussi.

Indication. Pour $\varepsilon > 0$, on pourra considérer n_0 tel que $|u_n| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$, puis étudier

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n u_k.$$

2. En déduire que si u converge vers une limite ℓ , v aussi.

11 CS

1. Étudier la suite définie par $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ et $x_0 = \alpha \in]0, 1[$.

2. Déterminer $\lim(1/x_{n+1} - 1/x_n)$.

3. En déduire que $x_n \sim 1/n$.

12 MP

Soit $(a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$S_q(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} a_k.$$

1. Si $q \in \mathbb{N}$ est fixé, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_q(n)$.

2. Si (a_n) converge, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(n)$.