Corrigés des exercices de la première feuille

1

Comme $u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$, $\lim u_n = 1$. Et $\lim v_n = 1$.

2

1. La suite vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$. Les deux racines de cette équation sont $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = \varphi$ et $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = 1-\varphi$. Alors $F_n = \alpha\varphi^n + \beta(1-\varphi)^n$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On détermine α et β grâce à $F_0 = F_1 = 1$: on trouve $\alpha = \varphi/\sqrt{5}$ et $\beta = (\varphi-1)/\sqrt{5}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}).$$

2. Développons F_{2p} par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2p+1} &= \frac{1}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}\sqrt{5}^{\,2p+1-k} \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^p \frac{\sqrt{5}}{2}\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{1}{\sqrt{5}^{\,k}}\binom{2p+1}{k}\,; \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2p+1} &= \left(\frac{5}{4}\right)^p \frac{\sqrt{5}}{2}\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{5}^{\,k}}\binom{2p+1}{k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}F_{2p} &= \left(\frac{5}{4}\right)^p \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{1-(-1)^{k-1}}{\sqrt{5}^{\,k}}\binom{2p+1}{k} \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^p \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{5^k}\binom{2p+1}{2k}.\end{aligned}$$

3

L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$ a pour racines

$$\lambda = 1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \text{ et } \overline{\lambda} = 1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}.$$

Alors il existe un unique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^{\,n}(\alpha\cos(n\tfrac{\pi}{4}) + \beta\sin(n\tfrac{\pi}{4})).$$

Or $u_0 = 0 = \alpha$ et $u_1 = 1 = \sqrt{2}\beta/\sqrt{2}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^{\,n}\sin(n\tfrac{\pi}{4}).$$

4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) + \sqrt{a}} \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}\,u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}\,u_n} = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{(u_n+\sqrt{a})^2} = v_n^2.\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, $v_n = v_0^{(2^n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Sans difficulté, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sqrt{a}\,\frac{1+v_n}{1-v_n} = \sqrt{a}\,\frac{1+v_0^{(2^n)}}{1-v_0^{(2^n)}}.$$

Si $|v_0| < 1$, $\lim v_0^{(2^n)} = 0$ et donc $\lim u_n = \sqrt{a}$.

Si $|v_0| > 1$, $\lim v_0^{(2^n)} = +\infty$ et donc $\lim u_n = -\sqrt{a}$.

Enfin, il n'est pas possible que $v_0 = 1$ car $a > 0$, et si $v_0 = -1$, $u_0 = 0$ et la suite n'est pas définie.

5 **CCP**

1. Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, la suite est bien définie. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Si $u_n \leqslant a$, $u_{n+1} \leqslant f(a)$ car f croît sur $\mathbb{R}_+$. Si l'on choisit a tel que $a = f(a)$, on aura aussi $u_{n+1} \leqslant a$. Seul $a = 1$ convient et l'on voit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.

En outre, pour $n > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2u_n^2}}.$$

Comme $u_n \leqslant 1$, $u_n^2 \leqslant 1$ et $u_n^2 \leqslant u_n$, donc $2u_n^2 \leqslant 1+u_n$ et $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$. La suite u est donc croissante.

Ainsi, la suite converge vers un réel $\ell \leqslant 1$. Comme f est continue, à la limite, $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 1$. La suite u converge vers 1.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\theta_n = \operatorname{Arccos} u_n$. Par définition, θ_n est l'unique angle de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \cos\theta_n$. On a $u_n = 2u_{n+1}^2 - 1$, c'est-à-dire $\cos\theta_n = 2\cos\theta_{n+1}^2 - 1$, donc $\theta_n = 2\,\theta_{n+1}$. Il s'ensuit que $\theta_n = \pi/2^{n+1}$, $u_n = \cos(\pi/2^{n+1})$, et l'on retrouve que $\lim u = 1$.

3. Posons $P_n = \prod_{k=1}^n u_k$. La suite (P_n) décroit car $P_{n+1}/P_n = u_{n+1} \leqslant 1$. Elle est minorée donc elle converge.

Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\theta_n = \dfrac{\sin 2\theta_n}{2\sin\theta_n} = \dfrac{\sin\theta_{n-1}}{2\sin\theta_n}$ donc

$$P_n = \frac{\sin\theta_0}{2^n\sin\theta_n} = \frac{1}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})} \sim \frac{2}{\pi}.$$

6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned}v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geqslant 0\end{aligned}$$

et v croît. De même, $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{n-1}$ donc

$$w_n - w_{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \leqslant 0$$

et w décroit. Enfin,

$$w_n - v_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc v et w sont adjacentes : elles convergent vers une même limite ℓ.

2. Alors, pour n grand,

$$u_n = 2\sqrt{n} + w_n = 2\sqrt{n} + \ell + \mathrm{o}(1) \sim 2\sqrt{n}.$$

7 — CCP

1. D'après le cours, deux suites sont équivalentes quand leur quotient tend vers 1.

Commentaire. En passant, cela impose que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Si le quotient tend vers 1, il est positif à partir d'un certain rang, donc les deux suites ont même signe.

2. Effectuons un développement limité :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6\,n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3\,n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{1}{6\,n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\sim -\frac{1}{6\,n^3} < 0. \end{aligned}$$

8 — CCP

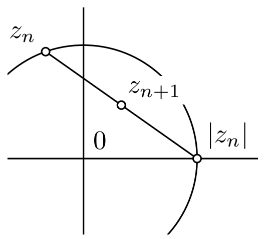
1. Posons $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\rho_n \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_n \in \left]-\pi, \pi\right]$. Alors

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} &= \tfrac{1}{2}(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\rho_n e^{i\theta_n/2}(e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}) \\ &= \rho_n \cos(\theta_n/2) e^{i\theta_n/2}. \end{aligned}$$

Comme $\theta_n/2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta_n/2) \geqslant 0$, donc $\rho_{n+1} = \rho_n \cos(\theta_n/2)$ et $\theta_{n+1} = \theta_n/2$. Alors, par une récurrence immédiate, $\theta_n = \theta_0/2^n$ et

$$\rho_n = \rho_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\theta_k/2) = \rho_0 \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_0/2^k).$$

2. Géométriquement, z_{n+1} est le milieu de z_n et $|z_n|$, d'où la construction suivante :



3. Clairement, $\lim \theta_n = 0$. En outre, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\cos(\theta_k/2) = \frac{\sin(\theta_k)}{2\sin(\theta_k/2)} = \frac{\sin(\theta_k)}{2\sin(\theta_{k+1})},$$

donc

$$\begin{aligned} \rho_n &= \rho_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\theta_k)}{2\sin(\theta_{k+1})} = \rho_0 \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin(\theta_n)} \\ &\sim \rho_0 \frac{\sin(\theta_0)}{2^n\,\theta_n} = \rho_0 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}. \end{aligned}$$

Alors, $\lim z_n = \rho_0 \dfrac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \in \mathbb{R}_+$.

Ce calcul n'est valable que si $\theta_0 \neq 0$, et alors $\theta_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais si $\theta_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+$ et la suite (z_n) est constante égale à z_0.

9 — MP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2/n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est continue, donc d'après les sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

10 — AM

1. Supposons que la suite u tend vers 0. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n > n_0$, $|u_n| < \varepsilon/2$.

Fixons un tel n_0. Soit un entier $n > n_0$:

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \\ &< \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} |u_k| + \frac{n-n_0}{n+1}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} |u_k| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme n_0 est fixé, le premier terme tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, donc il existe un entier n_1 tel que pour tout entier $n > n_1$,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(n_0, n_1)$: pour $n > N$, on a $|v_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, donc la suite v tend vers 0.

2. Supposons maintenant que la suite u tend vers ℓ et considérons la suite u' de terme général $u'_n = u_n - \ell$: cette suite tend vers 0 et, d'après ce que l'on vient de voir, la suite v' associée tend elle aussi vers 0. Or,

$$\begin{aligned} v'_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u'_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \ell = v_n - \ell \end{aligned}$$

donc la suite v tend vers ℓ.

Commentaire. C'est le théorème de Cesàro.

11 — CS

1. Soit $I = [0,1]$ et $f : I \to I$, $x \mapsto x - x^2$. On voit que $f(I) \subset I$ donc la suite (x_n) est bien définie. De plus, pour $x \in I$, $f(x) \leqslant x$ donc pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n) \leqslant x_n$. Ainsi, la suite (x_n) décroit. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Notons ℓ sa limite. Puisque f est continue sur I et que (x_{n+1}) converge vers ℓ, à la limite $\ell = f(\ell)$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. La valeur 1 est exclue, puisque la suite décroit. Finalement, $\lim x_n = 0$.

2. Quand $n \in \mathbb{N}$ est grand, x_n est proche de 0, donc

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{-1} &= (x_n - x_n^2)^{-1} = x_n^{-1}(1 - x_n)^{-1} \\ &= x_n^{-1}(1 + x_n + \mathrm{o}(x_n)) = x_n^{-1} + 1 + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

donc $\lim(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) = 1$.

3. Alors, d'aprés l'exercice 10 (le théorème de Cesàro), la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^{-1} - x_k^{-1}) = \frac{1}{n}(x_n^{-1} - x_0^{-1})$$

tend également vers 1, donc $x_n \sim 1/n$.

12 — MP

1. Soit q fixé. On a

$$|S_q(n)| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}|a_k|.$$

D'une part, pour tout $k \in [\![0,q]\!]$, $|a_k| \leqslant \max_{j\in[\![0,q]\!]}|a_j| = A_q$. D'autre part,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqslant n^k \leqslant n^q.$$

Alors, d'après les puissances comparées,

$$|S_q(n)| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q} n^q A_q = q\,A_q\frac{n^q}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. Notons $\ell = \lim a_n$. Inspirons-nous de la preuve de l'exercice 10 (le théorème de Cesàro). Soient un réel $\varepsilon > 0$, un entier q que l'on choisira plus loin et un entier arbitraire $n > q$. Sachant que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$,

$$\begin{aligned} |S_n(n) - \ell| &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ell\right| \\ &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_k - \ell| \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}|a_k - \ell| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k - \ell|. \end{aligned}$$

Comme $\ell = \lim a_n$, on peut choisir q de sorte que pour tout $k \geqslant q$, $|a_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. Alors

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Maintenant que q est fixé, comme à la première question, on voit que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}|a_k - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors il existe $N > q$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}|a_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Finalement, pour tout $n \geqslant N$, $n > q$, donc les majorations (1) et (2) sont valides et l'on a

$$|S_n(n) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |S_n(n) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Cela signifie que $\lim S_n(n) = \ell$.