

Dixième feuille d'exercices

COMPLÉMENTS SUR LES ESPACES VECTORIELS

95 ————— **TPE**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E . On pose

$$L = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker}(u)\}.$$

1. Montrer que L un sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. En donner la dimension.

96 ————— **CCP**

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3 = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n à l'aide de I_3 , A et A^2 .

97 ————— **MP**

$$\text{Calculer } A^n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

98 —————

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \{f \in E \mid f(1) = 0\},$$

$$G_1 = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\},$$

$$G_2 = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2\}.$$

2. Montrer que $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$.

99 ————— **WP**

Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X]$ et G l'ensemble des polynômes de E dont 1 est racine au moins triple.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont F est un supplémentaire.
2. Déterminer la projection sur F parallèlement à G .

100 ————— **CCP**

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ calculer } A^n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

101 ————— **CS**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Considérons l'endomorphisme f de E défini par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $f(e_n) = \sum_{k=1}^n a_k e_k$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer $f^n(e_1)$ et en déduire un polynôme annulateur de f .

102 ————— **MP**

Montrer que si u est un endomorphisme d'un espace de dimension n ,

$$\dim(\text{Ker } u) \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker } u).$$

103 ————— **MP**

1. Montrer que l'application $f : P \mapsto P - P'$ est bijective sur $\mathbb{R}_n[X]$, d'abord en utilisant sa matrice, puis sans l'utiliser.

2. Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, résoudre $P - P' = Q$.

104 ————— **IIE**

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$. Montrer que $p + q - p \circ q$ est un projecteur dont on donnera l'image et le noyau.