Corrigés des exercices de la dixième feuille

95 — TPE

1. Bien-sûr, $L \subset \mathfrak{L}(E, F)$ et il n'est pas vide puisqu'il contient l'application linéaire nulle.

Soient u et v dans L et λ un scalaire. Soit $x \in G$. On a $u(x) = 0$, car $G \subset \mathrm{Ker}(u)$; de même, $v(x) = 0$. Alors, $\lambda u(x) + v(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(\lambda u + v)$, donc $G \subset \mathrm{Ker}(\lambda u + v)$, d'où enfin $\lambda u + v \in L$.

Ainsi, L est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E, F)$. Il est de dimension finie car E et F le sont.

2. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de G. On la complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Soit $u \in L$. Comme $G \subset \mathrm{Ker}(u)$, l'image des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ est fixée, c'est 0. L'application u est alors entièrement déterminée par l'image des $n-p$ vecteurs restants. Alors,

$$\dim(L) = (\dim(E) - \dim(G)) \dim(F).$$

96 — CCP

Le polynôme

$$P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X+2)(X-1)(X-3)$$

est annulateur de A.

Commentaire. En passant, comme il est scindé à racines simples, A est diagonalisable.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de X^n par P : il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $R_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^n = Q_n P + R_n$ $(*)$. En évaluant cette égalité en les racines de P, -2, 1 et 3, on obtient $R_n(-2) = (-2)^n$, $R_n(1) = 1^n = 1$ et $R_n(3) = 3^n$. En écrivant $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$, où $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, on trouve sans difficulté :-)

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{15}(-2)^n - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10}3^n, \\ b_n &= -\tfrac{4}{15}(-2)^n + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10}3^n, \\ c_n &= \tfrac{1}{5}(-2)^n + 1 - \tfrac{1}{5}3^n. \end{aligned}$$

Enfin, en évaluant $(*)$ en A, on obtient

$$\begin{aligned} A^n = R_n(A) &= a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 \\ &= \left(\tfrac{1}{15}(-2)^n - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10}3^n\right) A^2 \\ &\quad + \left(-\tfrac{4}{15}(-2)^n + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10}3^n\right) A \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{5}(-2)^n + 1 - \tfrac{1}{5}3^n\right) I_3. \end{aligned}$$

97 — MP

Constatons que $A^2 = 2A - I_3$. Cela signifie le polynôme $(X-1)^2$ est annulateur de A.

Puissances positives. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après la formule de Taylor appliquée en 1,

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k,$$

où la somme est *finie*. Évaluons cette égalité en A :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(A - I_3)^k \\ &= P(1)\, I_3 + P'(1)(A - I_3), \end{aligned}$$

car pour tout $k \geqslant 2$, $(A - I_3)^k = 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= 1^n I_3 + n\, 1^{n-1}(A - I_3) \\ &= (1-n) I_3 + nA \\ &= \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ -2n & 2n+1 & 2n \\ n & -n & 1-n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puissances négatives. D'abord, A est inversible car $A(2I_3 - A) = I_3$, et $A^{-1} = 2I_3 - A$. On retrouve l'expression précédente avec $n = -1$. Alors, on imagine que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{-n} = (1+n) I_3 - nA.$$

Prouvons-le. On a

$$\begin{aligned} &A^n((1+n) I_3 - nA) \\ &= (I_3 + n(A - I_3))(I_3 - n(A - I_3)) \\ &= I_3 - n^2 (A - I_3)^2 = I_3, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'expression annoncée.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ -2n & 2n+1 & 2n \\ n & -n & 1-n \end{pmatrix}.$$

98

1. Comme $G_1 = \mathrm{Vect}(x \mapsto x)$ et $G_2 = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^2)$, ce sont bien des sous-espaces vectoriels de E, plus précisément, des droites vectorielles.

L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$ est une forme linéaire non nulle et $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$, donc F est un sous-espace vectoriel de E, plus précisément un hyperplan.

2. Voici deux preuves.

À la main. Raisonnons par analyse-synthèse pour prouver que $E = F \oplus G_1$, la preuve étant analogue pour l'autre somme directe. Soit $h \in E$.

Analyse. Si l'on peut écrire $h = f + g$ où $(f, g) \in F \times G_1$, alors $h(1) = f(1) + g(1) = g(1)$. Or il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ donc $g(1) = a$. Ainsi, $a = h(1)$ et $f = h - h(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse. Posons $g = h(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $f = h - h(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Clairement, $g \in G_1$ et comme $f(1) = h(1) - h(1) = 0$, $f \in F$. Enfin par construction, $h = f + g$.

Conclusion. Tout $h \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $h = f + g$ où $(f, g) \in F \times G_1$ donc $E = F \oplus G_1$.

Hyperplans. On a vu que F est un hyperplan de E. Or $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \notin F$ donc d'après le cours, $E = F \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. De même, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas dans F donc $E = F \oplus G_2$.

99 — WP

1. On voit que $G = A\mathbb{R}[X]$ où $A = (X-1)^3$. On sait que c'est un sous-espace vectoriel de E et que

$$E = A\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_2[X] = G \oplus F,$$

d'après le théorème de la division euclidienne.

2. Soit $P \in E$. D'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\,(X-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\,(X-1)^k + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\,(X-1)^k \\ &= \underbrace{P(1) + P'(1)\,(X-1) + \tfrac{1}{2}\,P''(1)\,(X-1)^2}_{\in F} \\ &\quad \underbrace{+ (X-1)^3 \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\,(X-1)^{k-3}}_{\in G}, \end{aligned}$$

où les sommes sont finies. Par unicité de la décomposition de P dans la somme directe $E = F \oplus G$, le projeté de P sur F parallèlement à G est donc

$$P(1) + P'(1)\,(X-1) + \tfrac{1}{2}\,P''(1)\,(X-1)^2.$$

100 — CCP

Voici (presque) trois méthodes.

Première méthode. Cherchons un polynôme annulateur de A : on *voit* que $A^2 = 5\,A - 6\,I_2$ donc $P = X^2 - 5\,X + 6 = (X-2)\,(X-3)$ est annulateur de A.

Commentaire. En fait, on reconnait que $P = \chi_A$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on sait que c'est un polynôme annulateur.

Faisons la division euclidienne de X^n par P : il existe un unique $(Q_n, a_n, b_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$X^n = P\,Q_n + a_n\,X + b_n. \tag{1}$$

En évaluant cette égalité en les racines de P,

$$\begin{cases} 2^n = 2\,a_n + b_n \\ 3^n = 3\,a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = 3^n - 2^n, \\ b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n. \end{cases}$$

En évaluant (1) en A, on a finalement,

$$A^n = (3^n - 2^n)\,A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)\,I_2.$$

Deuxième méthode. Afin d'appliquer le binôme de Newton, on cherche une écriture de la forme $A = B + C$, où B et C commutent. On *trouve* (par exemple)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I_2 + B.$$

On voit que $B^2 = B$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,2^k\,B^{n-k} = 2^n\,I_2 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\,2^k\,B \\ &= 2^n\,I_2 + ((1+2)^n - 2^n)\,B \\ &= 2^n\,I_2 + (3^n - 2^n)\,B. \end{aligned}$$

Troisième méthode. On diagonalise A...

101 — CS

1. La matrice de f est clairement

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_1 \\ 1 & \ddots & & a_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

2. Comme $f(e_1) = e_2$, on a $f^2(e_1) = e_3$, donc par une récurrence immédiate, $f^{k-1}(e_1) = e_k$. Alors

$$f(e_n) = f(f^{n-1}(e_1)) = f^n(e_1) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_k f^{k-1}(e_1),$$

où l'on voit que $P(f)(e_1) = 0$, en notant

$$P = X^n - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k.$$

Montrons que $P(f) = 0$, en l'évaluant sur la base $\mathscr{B}$. Comme les polynômes en f commutent, on a

$$\begin{aligned} P(f)(e_k) &= P(f)(f^{k-1}(e_1)) = (P(f) \circ f^{k-1})(e_1) \\ &= (f^{k-1} \circ P(f))(e_1) = f^{k-1}(P(f)(e_1)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, P est bien un polynôme annulateur de f.

102 — MP

1. On sait que $\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ donc

$$\dim(\mathrm{Ker}\,u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^2)).$$

2. Considérons la restriction $v = u|_{\mathrm{Ker}(u^2)}$,

$$v : \mathrm{Ker}(u^2) \to E,\ x \mapsto u(x),$$

et étudions son noyau et son image.

Montrons que $\mathrm{Ker}\,v \subset \mathrm{Ker}\,u$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,v$. Comme $v(x) = 0$, $u(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\,u$. Donc l'inclusion est acquise et $\dim(\mathrm{Ker}\,v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u)$.

Montrer que $\mathrm{Im}\,v \subset \mathrm{Ker}\,u$. Soit $y \in \mathrm{Im}\,v$: il existe $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$ tel que $y = u(x)$. Alors $u(y) = u^2(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}\,u$. Donc l'inclusion est acquise et $\mathrm{rg}(v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u)$.

Pour finir, d'après le théorème du rang et avec ce qui précède,

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) &= \dim(\mathrm{Ker}\,v) + \mathrm{rg}(v) \\ &\leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}\,u). \end{aligned}$$

103 — **MP**

1. Posons $E = \mathbb{R}_n[X]$. En notant $d : P \mapsto P'$ la dérivation sur E, on voit que $f = \mathrm{id}_E - d$, donc c'est bien un endomorphisme de E.

Dans la base canonique de E, f a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ & 1 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & -n \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

laquelle est de rang $n+1$ donc f est bijective.

La dérivée $(n+1)$-ième d'un polynôme de E est nulle. Donc $d^{n+1} = 0$ et $(\mathrm{id}_E - f)^{n+1} = 0$. Ainsi

$$\mathrm{id}_E + \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-f)^k = 0$$
$$\text{et } f \circ \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-f)^{k-1}\right) = \mathrm{id}_E\,.$$

Il s'ensuit que f est surjectif, donc bijectif puisque E est de dimension finie.

2. Alors, si $P - P' = Q$,

$$P = f^{-1}(Q) = \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-f)^{k-1}(Q).$$

104 — **IIE**

Tout d'abord, comme $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $q \circ p = 0$.

1. Posons $r = p + q - p \circ q$. Comme p et q sont des endomorphismes de E, r l'est aussi. En outre,

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) \\ &= p \circ p + p \circ q - p \circ p \circ q \\ &\quad + q \circ p + q \circ q - q \circ p \circ q \\ &\quad - p \circ q \circ p - p \circ q \circ q + p \circ q \circ p \circ q \\ &= p + p \circ q - p \circ q + 0 + q - 0 - 0 - p \circ q + 0 \\ &= p + q - p \circ q = r, \end{aligned}$$

et r est bien un projecteur de E.

2. Soit $x \in \operatorname{Im} r$. Comme r est un projecteur,

$$\begin{aligned} x &= r(x) = p(x) + q(x) - p \circ q(x) \\ &= p(x - q(x)) + q(x) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q, \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im} p$, $q(x) = 0$ donc $r(x) = p(x) = x$ donc $x \in \operatorname{Im} r$ et $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} r$; et si $x \in \operatorname{Im} q$, $x = q(x)$ donc $r(x) = p(x) + q(x) - p(x) = q(x) = x$ et $x \in \operatorname{Im} r$, donc $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$. Alors $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$. Il s'ensuit que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

En outre, $\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} q = \{0\}$ car $E = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$, et comme $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$. Alors la somme $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ est directe et $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

3. Soit $x \in \operatorname{Ker} r$. On a $r(x) = 0$ donc

$$0 = p \circ r(x) = p(x) + p \circ q(x) - p \circ q(x) = p(x)$$

et $x \in \operatorname{Ker} p$. De même, sachant que $q \circ p = 0$,

$$0 = q \circ r(x) = q \circ p(x) + q(x) + q \circ p \circ q(x) = q(x)$$

et $x \in \operatorname{Ker} q$. Ainsi, $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ donc

$$r(x) = p(x) + q(x) - p \circ q(x) = 0$$

et $x \in \operatorname{Ker} r$. Ainsi, $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$.

Finalement, $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.