

Onzième feuille d'exercices

ÉLÉMENTS PROPRES

105

Trouver les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

106

CCP

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$, et soit l'application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est linéaire et donner son noyau.
2. Donner ses éléments propres.

107

CCP

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n . Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi : \mathfrak{L}(E) \rightarrow \mathfrak{L}(E)$, $u \mapsto u \circ p$.

108

CCP

Soient $n \geq 4$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & (0) & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & (0) & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. Donner le sous-espace propre associé.
3. Déterminer les autres éléments propres de A .

109

CCP

Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)(X) = (X-1)^2 P''(X)$ est un endomorphisme. Donner ses valeurs propres. Est-il injectif?

RÉDUCTION

110

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$

111

AM

Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

112

MT

Diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}.$

113

IIE

1. Calculer le déterminant et la trace de

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^\top.$$

2. Est-elle diagonalisable?

114

MP

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Étudier les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n. \end{cases}$$

115

X

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Étudier la diagonalisabilité de $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto \text{Tr}(A)M + \text{Tr}(M)A$.

116

Navale

Déterminer les matrices M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

117

CCP

Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ non inversibles telles que $\text{Tr}(A) = 3$ et $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

118

CS

On définit l'endomorphisme φ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ par

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & b & c & a \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ p & n & o & d \end{pmatrix}.$$

Est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

119

CCP

Trouver les matrices A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

120

CCP

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $A^3 + 9A = 0$.

1. Montrer que ses valeurs propres possibles sont 0, $3i$ et $-3i$. Est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que A n'est pas inversible si n est impair.
3. Montrer que A ne peut pas être symétrique.