Corrigés des exercices de la onzième feuille

105

Sans difficulté, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A-\lambda I_3) = -(1+\lambda)(\lambda^2-6\lambda+1),$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 3+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}\}$. On trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } E_{3+2\sqrt{2}}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne fait pas les calculs. En effet, par analogie avec les nombres complexes, puisque $3-2\sqrt{2}$ est l'expression conjuguée de $3+2\sqrt{2}$ et que A est à coefficients entiers (donc rationnels), il suffit de conjuguer les vecteurs de $E_{3+2\sqrt{2}}(A)$:

$$E_{3-2\sqrt{2}}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

106 — CCP

1. Comme la trace est linéaire, f est un endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $A \neq 0$, donc si $M \in \mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, $f(M) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$.

2. Comme $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, $0 \in \mathrm{Sp}(f)$. En outre, $A \neq 0$ et $f(A) = \mathrm{Tr}(A)A$, donc $\mathrm{Tr}(A) \in \mathrm{Sp}(f)$. C'est bien une autre valeur propre car $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Comme $\mathrm{Ker}\, f$ est un hyperplan et que $A \notin \mathrm{Ker}\, f$, $E = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} \oplus \mathbb{C}A = E_0(f) \oplus E_{\mathrm{Tr}(A)}(f)$. Donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

107 — CCP

1. Si $p = \mathrm{id}_E$, pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = u$, donc $\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}(E)}$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$ et $E_1(\varphi) = \mathfrak{L}(E)$.

2. Si $p = 0_{\mathfrak{L}(E)}$, pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$, donc $\varphi = 0_{\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))}$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}$ et $E_0(\varphi) = \mathfrak{L}(E)$.

3. Supposons désormais que $p \notin \{0_{\mathfrak{L}(E)}, \mathrm{id}_E\}$: comme $p \circ p = p$, pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$, on a

$$\varphi \circ \varphi(u) = (u \circ p) \circ p = u \circ p = \varphi(u).$$

Donc $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Ainsi, φ est un projecteur de $\mathfrak{L}(E)$ et $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{0,1\}$.

Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. On a

$$\begin{aligned} u \in E_0(\varphi) &\iff \varphi(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)} \\ &\iff u \circ p = 0_{\mathfrak{L}(E)} \\ &\iff \forall x \in E,\ u(p(x)) = 0_E \\ &\iff \forall y \in \mathrm{Im}\, p,\ u(y) = 0_E \\ &\iff \forall y \in \mathrm{Im}\, p,\ y \in \mathrm{Ker}\, u \\ &\iff \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_0(\varphi) = \{u \in \mathfrak{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u\}.$$

En outre, on sait que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ donc en notant $q = \mathrm{id}_E - p$, $q \in E_0(\varphi)$. Et comme $p \neq \mathrm{id}_E$, $q \neq 0_{\mathfrak{L}(E)}$, donc $E_0(\varphi) \neq \{0_{\mathfrak{L}(E)}\}$. Ainsi, 0 est bien valeur propre de φ.

De même,

$$\begin{aligned} u \in E_1(\varphi) &\iff \varphi(u) = u \\ &\iff u \circ p = u \\ &\iff \forall x \in E,\ u(p(x)) = u(x) \\ &\iff \forall x \in E,\ u(x - p(x)) = 0_E \\ &\iff \forall y \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p),\ u(y) = 0_E \\ &\iff \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, u. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p$. Donc

$$E_1(\varphi) = \{u \in \mathfrak{L}(E) \mid \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u\}.$$

On voit que $p \in E_1(\varphi)$, et puisque $p \neq 0_{\mathfrak{L}(E)}$, $E_1(\varphi) \neq \{0_{\mathfrak{L}(E)}\}$, donc 1 est bien valeur propre de φ.

108 — CCP

1. La matrice

$$A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3 et $3 < n$ car $n \geqslant 4$. Ainsi, $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

2. De plus, le sous-espace propre associé est $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et d'après le théorème du rang, $\dim(E_1(A)) = n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - 3$.

Les colonnes C_2 à C_{n-1} de $A - I_n$ sont égales, donc pour tout $j \in [\![3, n-1]\!]$, $C_j - C_{j-1} = 0$, donc

$$\text{ligne } j \rightarrow \begin{pmatrix}(0)\\-1\\1\\(0)\end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Il y a $n-3$ tels vecteurs, qui sont manifestement indépendants, donc

$$E_1(A) = \bigoplus_{j=3}^{n-1} \mathbb{R}\begin{pmatrix}(0)\\-1\\1\\(0)\end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } j$$

3. Sur le même principe, on voit que $\mathrm{rg}(A) = n-1$, donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 1$. En outre, les deux colonnes extrêmes de A sont égales, donc

$$\begin{pmatrix}1\\(0)\\-1\end{pmatrix} \in E_0(A) \text{ et } E_0(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\(0)\\-1\end{pmatrix}.$$

Soit alors $\lambda \notin \{0,1\}$ une autre valeur propre éventuelle de A, et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$X \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k = \lambda x_1, \\ x_1 + x_n = (\lambda - 1)x_i,\ i \in [\![2, n-1]\!], \\ \sum_{k=1}^n x_k = \lambda x_n. \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$,

$$\begin{aligned} & X \in E_\lambda(A) \\ \iff & \begin{cases} x_1 = x_n,\ x_2 = \cdots = x_{n-1}, \\ \sum_{k=1}^n x_k = \lambda x_1, \\ x_1 + x_n = (\lambda - 1)\, x_2, \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_1 = x_n,\ x_2 = \cdots = x_{n-1}, \\ 2\, x_1 + (n-2)\, x_2 = \lambda x_1, \\ 2\, x_1 = (\lambda - 1)\, x_2, \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_1 = x_n,\ x_2 = \cdots = x_{n-1}, \\ 2\, x_1 = (\lambda - 1)\, x_2, \\ (\lambda + n - 3)\, x_2 = \lambda x_1, \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_1 = x_n,\ x_2 = \cdots = x_{n-1}, \\ 2\, x_1 = (\lambda - 1)\, x_2, \\ 2\, (\lambda + n - 3)\, x_2 = \lambda (\lambda - 1)\, x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $x_2 = 0$, tous les x_i sont nuls et $X = 0$, ce qui n'est pas, donc $x_2 \neq 0$. Alors la dernière équation devient $\lambda^2 - 3\,\lambda - 2\,(n-3) = 0$, dont les racines sont

$$\lambda_\varepsilon = \frac{3 + \varepsilon\,\sqrt{8n - 15}}{2} \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

En passant, comme $n \geqslant 4$, $8n - 15 \geqslant 0$. Les espaces propres correspondants sont

$$E_{\lambda_\varepsilon}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \lambda_\varepsilon - 1 \\ (2) \\ \lambda_\varepsilon - 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon = \pm 1.$$

Commentaire. A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Alors certaines étapes de la résolution auraient pu être abrégées.

109 — **CCP**

1. Par linéarité de la dérivation, φ est clairement linéaire. En outre, si $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(P'') \leqslant n - 2$ donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant n - 2 + 2 = n$. Ainsi, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned} \varphi(X^k) &= (X-1)^2\, k\,(k-1)\, X^{k-2} \\ &= k\,(k-1)\,(X^k - 2\,X^{k-1} + X^{k-2}). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale les $k\,(k-1)$, où $k \in [\![0, n]\!]$. Donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k\,(k-1),\ k \in [\![0, n]\!]\}.$$

3. $0 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ donc φ n'est pas injectif.

110

Sans difficulté, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = (x-1)^2\,(x+1).$$

Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1_1, 1_2\}$ et l'on trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } E_1(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, $A = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

111 — **AM**

On trouve que 2 est valeur propre triple de A et

$$E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors A n'est pas diagonalisable. Mais comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable.

Soit a l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Cherchons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice T de a soit triangulaire. Sur la diagonale de cette matrice figurent les valeurs propres de a, donc celles de A :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. Ce résultat hors-programme n'est pas à connaitre, et l'examinateur est censé donner l'indication lors de l'exercice. Ou alors, on mène les calculs qui suivent avec α, β, γ quelconques, et l'on voit ensuite que ce choix est possible.

Grâce à la première colonne de T, on voit que $a(e_1) = 2\,e_1$, donc on peut choisir

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la seconde colonne de T, on voit que $a(e_2) = 2\,e_2 + e_1$. Cherchons donc

$$e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tel que $A\,e_2 = 2\,e_2 + e_1$. On résout

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'on choisit *une* solution

$$e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec la dernière colonne de T, cherchons e_3 tel que $a(e_3) = 2\,e_3 + e_2$: on résout

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'on choisit *une* solution

$$e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

112 — MT

Préambule. La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale. Si $a = g$, a est valeur propre quadruple, et sinon, a et g sont valeurs propres doubles.

Cas où $a = g$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à $a\,I_4$, si et seulement si elle est égale à $a\,I_4$, si et seulement si les autres coefficients de A sont tous nuls. En effet, seule I_4 est semblable à I_4.

Cas où $a \neq g$. Voici deux méthodes, entre autres.

Rang. La matrice A est diagonalisable si et seulement si ses espaces propres $E_a(A)$ et $E_g(A)$ sont des plans, autrement dit, si et seulement si les matrices $A - a\,I_4$ et $A - g\,I_4$ sont de rang 2. On voit que $\operatorname{rg}(A - a\,I_4) = 2$ si et seulement si $b = 0$ et $\operatorname{rg}(A - g\,I_4) = 2$ si et seulement si $h = 0$. Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $b = h = 0$.

Polynômes. Comme $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{a, g\}$, A est diagonalisable si et seulement si le polynôme

$$\textstyle\prod_{\lambda\in\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)}(X-\lambda) = (X-a)(X-g)$$

est annulateur de A. Et l'on voit que la matrice

$$(A - a\,I_4)(A - g\,I_4) = \begin{pmatrix} 0 & b(a-g) & be & bf+ch \\ 0 & 0 & 0 & eh \\ 0 & 0 & 0 & h(g-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nulle si et seulement si $b = h = 0$.

113 — IIE

1. Notons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On voit que $\Phi^2 = \mathrm{id}_E$, donc Φ est une symétrie. Ses sous-espaces propres sont $\operatorname{Ker}(\Phi - \mathrm{id}_E) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, et $\operatorname{Ker}(\Phi + \mathrm{id}_E) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques. De plus, on sait que $E = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, χ_Φ est scindé sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{Sp}(\Phi) = \{-1, 1\}$, et on a les multiplicités

$$m(1) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1),$$
$$m(-1) = \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1).$$

Enfin, puisque χ_Φ est scindé sur $\mathbb{R}$,

$$\det(\Phi) = \textstyle\prod_{\lambda\in\operatorname{Sp}(\Phi)} \lambda^{m(\lambda)} = (-1)^{n(n-1)/2},$$
$$\operatorname{Tr}(\Phi) = \textstyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(\Phi)} \lambda\, m(\lambda) = n.$$

2. Oui, c'est une symétrie.

114 — MP

On a $U_{n+1} = AU_n$, on posant

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par une récurrence immédiate, $U_n = A^n\,U_0$. Il reste à calculer A^n. Pour cela, diagonalisons A.

Les valeurs propres de A sont 1, $\lambda = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\mu = \overline{\lambda}$. Donc, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(1, \lambda, \mu)$. Alors $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. Ainsi,

$$U_n = P\,D^n P^{-1} U_0.$$

Sans calculer P^{-1}, posons

$$V_0 = P^{-1}\,U_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Alors

$$U_n = P\,D^n\,V_0 = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\,\lambda^n \\ \gamma\,\mu^n \end{pmatrix}.$$

Nommons V_1, V_λ et V_μ les colonnes de P, qui représentent des vecteurs propres de A respectivement associés à 1, λ et μ. On voit donc que

$$U_n = \alpha\,V_1 + \beta\,\lambda^n\,V_\lambda + \gamma\,\mu^n\,V_\mu.$$

Autrement dit, les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont combinaisons linéaires des suites géométriques (1), (λ^n) et (μ^n).

Comme $|\lambda| = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$, $\lim \lambda^n = 0$; de même, $\lim \mu^n = 0$. Alors les suites (a_n), (b_n) et (c_n) ont des limites ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c. Et en passant à la limite sur les coordonnées de la relation précédente, on peut même écrire

$$\begin{pmatrix} \ell_a \\ \ell_b \\ \ell_c \end{pmatrix} = \alpha\,V_1.$$

Le calcul explicite — et fastidieux — de P est donc inutile : il suffit de déterminer sa première colonne, autrement dit l'espace propre $E_1(A)$. En nommant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on voit que

$$C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète en

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$E_1(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'on peut choisir

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela entraine que $\ell_a = \ell_b = \ell_c$. Nommons ℓ cette valeur commune.

Constatons en sommant les trois suites que pour tout n,

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n,$$

et donc

$$a_n + b_n + c_n = a + b + c,$$

et en passant à la limite,

$$3\,\ell = a + b + c.$$

En conclusion, les trois suites convergent vers

$$\ell = \tfrac{1}{3}\,(a + b + c).$$

115 — **X**

Notons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $M \in E$. On a

$$\begin{aligned} \Phi^2(M) &= \Phi(\operatorname{Tr}(A)\,M + \operatorname{Tr}(M)\,A) \\ &= \operatorname{Tr}(A)\,\Phi(M) + \operatorname{Tr}(M)\,\Phi(A) \\ &= \operatorname{Tr}(A)\,\Phi(M) + 2\operatorname{Tr}(M)\,\operatorname{Tr}(A)\,A \\ &= \operatorname{Tr}(A)\,\Phi(M) + 2\operatorname{Tr}(A)\,(\Phi(M) - \operatorname{Tr}(A)\,M) \\ &= 3\operatorname{Tr}(A)\,\Phi(M) - 2\operatorname{Tr}(A)^2\,M. \end{aligned}$$

Cela signifie que $\Phi^2 - 3\operatorname{Tr}(A)\,\Phi + 2\operatorname{Tr}(A)^2\,\mathrm{id}_E = 0$, ou encore que le polynôme

$$\begin{aligned} P &= X^2 - 3\operatorname{Tr}(A)\,X + 2\operatorname{Tr}(A)^2 \\ &= (X - \operatorname{Tr}(A))\,(X - 2\operatorname{Tr}(A)) \end{aligned}$$

est annulateur de Φ.

Si $\operatorname{Tr}(A) = 0$, $P = X^2$, donc $\Phi^2 = 0$. Dans ce cas, Φ est diagonalisable si et seulement si $\Phi = 0$, ce qui impose que $A = 0$.

Si $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$, P est annulateur de Φ, scindé à racines simples donc Φ est diagonalisable.

Finalement, Φ est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

116 — **Navale**

Nommons (E) l'équation et posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Commençons par diagonaliser J : c'est possible car J est symétrique réelle. En nommant C_1 et C_2 ses colonnes, on voit que $C_1 = C_2$, autrement dit

$$C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Où l'on voit que $0 \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(J)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(J).$$

De même, on voit que

$$C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète directement en

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $2 \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(J)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(J).$$

Il s'ensuit que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(J) = \{0, 2\}$ et

$$E_0(J) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ E_2(J) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $J = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(0, 2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit M une solution de (E). Comme $J = M^2 + M$, J est un polynôme en M, donc J et M commutent. Cela entraine que les sous-espaces propres de J sont stables par M. Comme ce sont des droites, dire qu'elles sont stables par M signifie que ce sont des droites propres pour M. Autrement dit, la base de vecteurs propres de J trouvée plus haut est aussi une base de vecteurs propres de M. Alors M est diagonalisable, et dans la même base que J : il existe donc une matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}(a, b)$ telle que $M = P\,\Delta\,P^{-1}$.

On a $M^2 + M = J$, d'où $\Delta^2 + \Delta = D$, ou encore $a^2 + a = 0$ et $b^2 + b = 2$, c'est-à-dire $a \in \{-1, 0\}$ et $b \in \{-2, 1\}$. Donc, quatre matrices conviennent possiblement :

$$\begin{aligned} P\operatorname{diag}(-1,-2)\,P^{-1} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ P\operatorname{diag}(-1,1)\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ P\operatorname{diag}(0,-2)\,P^{-1} &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ P\operatorname{diag}(0,1)\,P^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et l'on vérifie sans peine qu'elles conviennent effectivement toutes les quatre.

Commentaire. On a en fait raisonné par analyse-synthèse : si M est solution de (E), alors c'est l'une des quatre ci-dessus ; et les quatre conviennent.

117 — **CCP**

On a $A^3 - 3\,A^2 + 2\,A = A\,(A - I_3)\,(A - 2\,I_3)$. Comme A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, A est diagonalisable. De plus, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0, 1, 2\}$. Mais A n'est pas inversible donc

$0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Enfin, $\mathrm{Tr}(A) = 3$ est la somme des valeurs propres de A, qui sont donc forcément 0, 1 et 2. Ainsi, les matrices cherchées sont exactement les matrices semblables à $\mathrm{diag}(0,1,2)$.

118 — **CS**

1. Dans l'action de φ sur M, les coefficients de M ne bougent pas, sauf les quatre coins qui tournent d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors $\varphi^4 = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})}$. Le polynôme $X^4 - 1$ est donc annulateur de φ. Mais comme il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, on ne peut pas encore conclure.

On sait seulement que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$.

Soit $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = M$. Alors les coefficients de M sont arbitraires, sauf les coins qui vérifient $a = d = p = m$. Ainsi, M est déterminée par un coin et ses autres coefficients, donc $\dim E_1(\varphi) = 13$.

Soit $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = -M$. Alors les coefficients de M autres que ses coins sont nuls, et les coins vérifient $a = -d = p = -m$. Ainsi, M est déterminée par un coin donc $\dim E_{-1}(\varphi) = 1$.

Mais la somme de ces dimensions est $13 + 1 = 14 < 16$, donc φ n'est pas diagonalisable.

2. À proprement parler, on ne peut pas se demander si φ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car c'est un endomorphisme de l'espace $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ qui est *réel.*

Mais l'on peut considérer l'endomorphisme $\widetilde{\varphi}$ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ dont l'action est la même que celle de φ dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. On a donc toujours $\widetilde{\varphi}^4 = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})}$. Le polynôme annulateur $X^4 - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc $\widetilde{\varphi}$ est diagonalisable.

119 — **CCP**

Nommons M la matrice donnée.

Analyse. Supposons que A existe. Comme $A^2 = M$, M est un polynôme en A, donc M et A commutent et tout sous-espace propre de M est stable par A.

Clairement, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{1,2,3\}$ et M est diagonalisable. Tout aussi clairement (hum !),

$$E_3(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad E_2(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$E_1(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$ et

$$P = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Comme les sous-espaces propres de M sont des droites et qu'elles sont stables par A, ce sont aussi des droites propres de A. Du coup, A est aussi diagonalisable, et dans la même base que M. Autrement dit, il existe une matrice diagonale Δ telle que $A = P\Delta P^{-1}$. Ainsi, $\Delta^2 = D$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3})$.

Synthèse. On vérifie sans peine que les matrices $P\,\mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3})\,P^{-1}$ conviennent.

120 — **CCP**

1. Nous voyons que le polynôme $P = X^3 + 3X$ est annulateur de A. Nous savons que les valeurs propres de A sont parmi les racines de P, lesquelles sont précisément 0 et $\pm 3i$.

Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

En revanche, P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc il faut procéder autrement dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Par l'absurde, si l'on suppose A diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont toutes réelles et parmi les racines de P, donc 0 est la seule valeur propre de A. Donc A est nulle, puisque qu'elle est semblable à la matrice nulle. Cela contredit l'hypothèse que A était non nulle. Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Supposons que n est impair. Le polynôme caractéristique χ_A de A est de degré n, impair, donc ses limites, infinies, en $\pm\infty$ sont opposées : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cela entraine que χ_A s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc A admet une valeur propre réelle. La seule possible est 0, d'après la question précédente, donc A n'est pas inversible.

3. Si A était symétrique, elle serait diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et l'on a vu que c'est impossible. Donc A ne peut être symétrique.