# Douzième feuille d'exercices

## Espaces vectoriels normés

**121** — CCP

Considérons l'ensemble $\ell^1$ des suites réelles $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série $\sum u_n$ converge absolument. Pour une telle suite, posons

$$\|u\|_1=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\,,\ \|u\|_2=\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2},\ \|u\|_\infty=\sup_{n\geqslant 0}|u_n|.$$

**1.** Montrer que $\ell^1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2.** Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent trois normes sur $\ell^1$.

**122**

Considérons le segment $I=[0,1]$ et l'ensemble

$$E=\{f\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})\mid f(0)=0\}.$$

**1.** Montrer que $E$ est un espace vectoriel.

**2.** Pour $f\in E$, on pose

$$N_1(f)=\sup_I|f+f'|\text{ et }N_2(f)=\sup_I|f|+\sup_I|f'|.$$

Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont deux normes sur $E$.

**3.** Montrer qu'elles sont équivalentes. *Indication : si $f\in E$, considérer l'application $g:x\mapsto e^x f(x)$.*

**123** — MP

Soit $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose

$$N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1(f'(t))^2\,\mathrm{d}t}.$$

**1.** Montrer que $N$ est une norme sur $E$.

**2.** Montrer que pour tout $f\in E$, $\|f\|_\infty\leqslant\sqrt{2}\,N(f)$.

**3.** Les normes $N$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

**124** — CCP19

Soit $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall(A,B)\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|.$$

Soit $A\in E$ telle que $\|A\|<1$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on pose $S_p=\sum_{k=0}^{p}A^k$.

**1.** Montrer que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0.

**2.** Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0}\|A^k\|$ converge. On admet qu'alors, la suite $(S_p)_{p\geqslant 0}$ converge et l'on note $S$ sa limite.

**3.** Montrer que la fonction $f:M\mapsto(I_n-A)M$ est continue.

**4.** Calculer $(I_n-A)S_p$. Que conclure ?

**125** — AM

Étudier la suite $(X_k)$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $k\in\mathbb{N}$ par $X_{k+1}=AX_k$, où

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\text{ et }X_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

**126**

Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit $A$ une partie non vide de $E$ telle que

$$\forall x\in A,\forall t\geqslant 0,\ tx\in A.$$

**1.** Montrer que si $A$ est ouvert, $A=E$.

**2.** Est-ce encore vrai si $A$ est fermé ?

**127**

Montrer que $\mathrm{Adh}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))=\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

**128** — CS

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})=\{M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\mid\det(M)=1\}.$$