Corrigés des exercices de la douzième feuille

121 ————— **CCP**

1. D'après le cours, si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge absolument aussi. De plus, ℓ^1 est clairement non vide. Donc c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

2. La seule difficulté par rapport aux normes usuelles définies sur $\mathbb{R}^n$, est de prouver que les trois normes sont bien définies.

La première l'est par nature, puisque ℓ^1 est l'ensemble des suites pour lesquelles la série converge absolument.

Soit $u \in \ell^1$. Comme $\sum |u_n|$ converge, la suite $(|u_n|)$ tend vers 0. Alors, à partir d'un certain rang, $u_n^2 \leq |u_n|$, donc $\sum u_n^2$ converge et $\|u\|_2$ est bien définie.

Enfin, nous venons de dire que $(|u_n|)$ tend vers 0, donc c'est une suite bornée : elle admet une borne supérieure et $\|u\|_\infty$ est bien définie.

Le reste des propriétés est une simple généralisation des normes vues en cours.

122 —————

1. E est un espace vectoriel car c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$.

2. Comme f, f' et $f + f'$ sont continues sur I , on voit que

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

en reconnaissant la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ des fonctions continues sur le segment I . La vérification que N_1 et N_2 sont des normes est alors immédiate. Précisons que si $N_1(f) = 0, f + f' = 0$, mais comme $f(0) = 0$, la seule solution de ce problème de Cauchy est $f = 0$.

3. Soit $f \in E$.

On sait déjà que $\|f + f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, c'est-à-dire que $N_1(f) \leq N_2(f)$.

En outre, pour $x \in I, g'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$ donc $|g'(x)| = e^x |f(x) + f'(x)| \leq e^x N_1(f)$. Alors

$$\begin{aligned} e^x |f(x)| &= |g(x) - g(0)| = \left| \int_0^x g'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |g'(t)| dt \leq \int_0^x e^t N_1(f) dt = (e^x - 1) N_1(f), \end{aligned}$$

d'où $|f(x)| \leq (1 - e^{-x}) N_1(f) \leq (1 - e^{-1}) N_1(f)$ et $\|f\|_\infty \leq (1 - e^{-1}) N_1(f)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) + f(x) - f(x)| \\ &\leq |f'(x) + f(x)| + |f(x)| \\ &\leq N_1(f) + (1 - e^{-1}) N_1(f) \end{aligned}$$

et $\|f'\|_\infty \leq (2 - e^{-1}) N_1(f)$.

Alors, $N_2(f) \leq (3 - 2e^{-1}) N_1(f)$.

Finalement, les normes N et N' sont équivalentes.

123 ————— **MP**

1. La forme de cette norme laisse présager qu'elle est associée à un produit scalaire. Plus précisément, l'application

$$(\cdot | \cdot) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f' g'$$

est un produit scalaire euclidien sur E . En effet, c'est clairement une forme bilinéaire symétrique positive, et si $(f | f) = 0, f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2 = 0$; comme les termes sont positifs, $f(0)^2 = \int_0^1 (f')^2 = 0$: alors $f(0) = 0$ et puisque $(f')^2$ est continue et positive, $f' = 0$, donc f est constante, d'où $f = 0$.

Commentaire. Mieux encore, si $f' = 0$ et $f(0) = 0$, on reconnaît un problème de Cauchy et $f = 0$, comme l'unique solution de ce problème de Cauchy.

Et l'on voit bien que N est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Commentaire. Si l'on ne sait pas « deviner » le produit scalaire, on le reconstitue avec une identité de polarisation : pour f et g dans E ,

$$(f | g) = \frac{1}{2} (N(f + g)^2 - N(f)^2 - N(g)^2).$$

Bien-sûr, si N n'est pas associée à un produit scalaire, l'application ainsi reconstituée ne sera pas un produit scalaire.

2. Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1], f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ donc

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'|. \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales,

$$\int_0^1 |f'| = \int_0^1 1 \cdot |f'| \leq \sqrt{\int_0^1 1^2} \sqrt{\int_0^1 f'^2} = \sqrt{\int_0^1 f'^2}.$$

D'autre part, en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais sur les sommes,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \sqrt{\int_0^1 f'^2} \\ &= 1 \cdot |f(0)| + 1 \cdot \sqrt{\int_0^1 f'^2} \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2} = \sqrt{2} N(f). \end{aligned}$$

Alors $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: considérons la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

D'une part, $\|f_n\|_\infty = 1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} N(f_n) &= \sqrt{\int_0^1 (n t^{n-1})^2 dt} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Alors, il est impossible de majorer N par $\|\cdot\|_\infty$, ce qui signifie que ces normes ne sont pas équivalentes.

124 ————— **CCP19**

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$. Or $\|A\| < 1$, donc $\lim \|A^k\| = 0$, c'est-à-dire $\lim A^k = 0$.

2. Pour la même raison, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, et $\sum \|A\|^k$ converge comme série géométrique de raison $\|A\| < 1$. Donc par majoration, $\sum \|A^k\|$ converge.

3. La fonction f est linéaire, donc elle est continue, puisque E est de dimension finie.

4. On a $(I_n - A) S_p = I_n - A^{p+1}$. Comme (A^p) converge vers 0, $\lim(I_n - A^{p+1}) = I_n$. En outre, $(I_n - A) S_p = f(S_p)$; f est continue; et $\lim S_p = S$; donc par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim f(S_p) = f(S)$. Ainsi, à la limite, $(I_n - A) S = I_n$. Cela signifie que $I_n - A$ est inversible, et que son inverse est $(I_n - A)^{-1} = S$.

125

AM

Par une récurrence immédiate, pour tout k ,

$$X_k = A^k X_0.$$

Explicitons A^k . Écrivons $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Clairement, $J^2 = 3J$, donc si $p \geq 1$, $J^p = 3^{p-1} J$. Comme I_3 et J commutent,

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{4^k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} J^p \\ &= \frac{1}{4^k} \left(I_3 + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} 3^{p-1} J \right) \\ &= \frac{1}{4^k} I_3 + \frac{1}{3 \cdot 4^k} \left(\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} 3^p - 1 \right) J \\ &= \frac{1}{4^k} I_3 + \frac{((1+3)^k - 1)}{3 \cdot 4^k} J \\ &= \frac{1}{4^k} I_3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) J \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} J. \end{aligned}$$

Alors, par opérations usuelles sur les coefficients,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = \frac{1}{3} J X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. Il est également possible de diagonaliser A pour calculer ses puissances.

126

1. Comme $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Alors $0 \cdot a = 0 \in A$. Il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset A$, car A est ouvert. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $y = \frac{r}{2\|x\|} x$: $\|y\| = \frac{r}{2}$ donc $y \in B(0, r) \subset A$. Il s'ensuit que $x = \frac{2\|x\|}{r} y \in A$. Ainsi, $E \subset A$ et $A = E$ car $A \subset E$.

2. Si A est fermé, c'est faux, comme on le voit par exemple en considérant que A est une droite de E .

127

Comme l'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\|\cdot\|$ l'une d'elles.

Soient $M \in E$ et χ_M son polynôme caractéristique. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, posons $M_\varepsilon = M - \varepsilon I_n$ de sorte que $\det(M_\varepsilon) = (-1)^n \chi_M(\varepsilon)$. Comme χ_M a un nombre fini de racines, $\det(M_\varepsilon) \neq 0$ pour ε suffisamment petit. Or $\|M - M_\varepsilon\| = \varepsilon \|I_n\|$ est petit avec ε . Alors, toute boule ouverte centrée en M rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, donc M est adhérent à $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{Adh}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

128

CS

ADHÉRENCE. On voit que $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application déterminant. Or cette application est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{1\}$ est fermé, donc $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est fermé. Ainsi, $\text{Adh}(\text{SL}_n(\mathbb{R})) = \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

INTÉRIEUR. Moralement, $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est une surface de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, d'équation $\det(A) = 1$, donc on imagine que son intérieur est vide. Montrons-le, en prouvant qu'il existe des matrices arbitrairement proches de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant n'est pas 1.

Soit $M = (m_{ij}) \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$. En développant arbitrairement son déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$1 = \det(M) = \sum_{i=1}^n m_{i1} M_{i1},$$

en notant M_{i1} le cofacteur de m_{i1} . Il existe $i \in [1, n]$ tel que $M_{i1} \neq 0$, sinon on aurait $\det(M) = 0$. Fixons un tel i .

Pour x réel, considérons $M_x = M + x E_{i1}$, où E_{i1} est la matrice élémentaire usuelle, contenant des 0 partout sauf à la ligne i dans la colonne 1. Considérons une norme arbitraire $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ — c'est égal puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. On a $\|M_x - M\| = |x| \|E_{i1}\|$. Donc quand x est proche de 0, M_x est proche de M . Autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $M_x \in B(M, r)$.

Explicitons $f(x) = \det(M_x)$. En notant, pour $j \in [1, n]$, C_j les colonne de M et E_j celles de E_{i1} , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \det(M + x E_{i1}) \\ &= \det(C_1 + x E_1, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \det(x E_1, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det(M) + x \det(E_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, sachant que tous les termes de E_1 sont nuls sauf le terme i qui vaut 1, et comme tous les autres termes du déterminant sont ceux de M ,

$$\det(E_1, C_2, \dots, C_n) = M_{i1}.$$

Ainsi, $f(x) = 1 + x M_{i1}$. Donc f est un polynôme de degré 1 non constant, car $M_{i1} \neq 0$. Or $f(0) = 1$, donc pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 1$. Cela signifie que $M_x \notin \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, pour tout $r > 0$, il existe $M \in B(M, r)$ tel que $M \notin \text{SL}_n(\mathbb{R})$. Cela signifie que A n'est pas intérieur à $\text{SL}_n(\mathbb{R})$. Donc l'intérieur de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est bien vide, comme on l'avait imaginé.