

Treizième feuille d'exercices

SUITES DE FONCTIONS

129 ————— **AM**

Étudier la suite $(\int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{\sin x} dx)_{n \in \mathbb{N}}$.

130 ————— **TPE**

Étudier la suite des fonctions

$$f_n : x \mapsto \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

131 ————— **CCP**

Étudier sur $[0, 1]$ la convergence de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \sin(n^2 x) e^{-n^2 x}$.

132 ————— **CCP**

Étudier la convergence des suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(4^n I_n)_{n \geq 0}$ où $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$.

133 ————— **CCP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. Converge-t-elle uniformément ?

3. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n$.

134 ————— **CCP**

1. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t$.

2. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite des fonctions

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \sin \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x > \frac{n\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

135 ————— **CCP**

Étudier la suite des fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}.$$

136 ————— **MP**

On pose $\varphi(x) = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$ si $|x| < 1$ et $\varphi(x) = 0$ sinon. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-n^2 x^2} dx.$$