Corrigés des exercices de la treizième feuille

129 — AM

Voici deux preuves.

Preuve directe. On sait que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc

$$\frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{2} \leqslant \int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

et la suite tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Preuve savante. La suite des fonctions continues $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{\sin x}$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction constante $f : x \mapsto 1$, laquelle est évidemment continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant 1$, où la fonction $x \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc d'après le théorème de convergence dominée, les f_n et f sont intégrables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ — ce qui n'est pas une surprise — et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2} f = \frac{\pi}{2}.$$

130 — TPE

Convergence simple. Clairement, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$.

Convergence uniforme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) - f(x)| \\
&= \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} - \left|x - \frac{1}{2}\right| \\
&= \frac{1}{n^2\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \left|x-\frac{1}{2}\right|\right)} \leqslant \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

donc (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

131 — CCP

Convergence simple. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Soit $x \in \,]0,1]$. On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, car le sinus est borné et l'exposant tend vers $-\infty$.

Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme. On voit clairement que $f_n(1/n^2) - 0 = e^{-1} \sin 1$ ne tend pas vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Convergence uniforme sur tout segment $[a,1]$ où $a > 0$. Soit $a > 0$: pour tout $x \in [a,1]$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-n^2 a}$ et ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$ où $a > 0$.

132 — CCP

1. Sur le segment $K = [0,1]$, $x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, donc $I_n \leqslant (\frac{1}{4})^n$ et $\lim I_n = 0$.

2. Appliquons le théorème de convergence dominée aux fonctions $f_n : K \to K$, $x \mapsto 4^n x^n (1-x)^n$, de sorte que $4^n I_n = \int_K f_n$.

∘ Les fonctions f_n sont continues sur K.
∘ On a $f_n(\frac{1}{2}) = 1$, et si $x \neq \frac{1}{2}$, $4x\,(1-x) < 1$, donc la suite numérique $(f_n(x))$ tend vers 0. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur K vers la fonction f, nulle sur K sauf en $\frac{1}{2}$ où elle vaut 1.
∘ La fonction f est continue par morceaux sur K.
∘ On a la domination $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, où la fonction $x \mapsto 1$ est positive, continue et intégrable sur K.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée,

- les f_n et f sont intégrables sur K ;
- $\lim \int_K f_n = \int_K f = 0$. Ainsi, $\lim 4^n I_n = 0$.

133 — CCP

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par croissance comparée, $x^n \ll n!$, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f_n' : x \mapsto \frac{1}{n!}\,(n-x)\,x^{n-1}\,e^{-x}.$$

Ainsi, f_n croît sur $[0,n]$ puis décroit sur $[n,+\infty[$, donc

$$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \frac{n^n\,e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il s'ensuit que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

3. D'une part, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \ll_{x\to+\infty} 1/x^2$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

4. On reconnait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$
Donc ces intégrales ne tendent pas vers 0.

Commentaire. Cet exercice est intéressant à plus d'un titre.

D'abord, il montre que l'hypothèse que I est un segment dans le théorème sur l'intégration sur un segment est primordiale.

Ensuite, on voit que le théorème de convergence dominée ne s'applique pas. Comme toutes les autres hypothèses sont valides, c'est la domination qui n'est pas possible.

134 — **CCP**

1. Oui, par concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand, $x \leqslant n\,\frac{\pi}{2}$, donc

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)\right).$$

En outre, quand n tend vers $+\infty$, $\sin\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$, donc $\ln(1-\sin\frac{x}{n}) \sim -\frac{x}{n}$ et $n\ln(1-\sin\frac{x}{n}) \sim -x$. Par continuité de l'exponentielle en $-x$, $f_n(x) \sim e^{-x}$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

3. Appliquons le théorème de convergence dominée. Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, car $f_n(n\,\frac{\pi}{2}) = 0$; la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f ; f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\left(n \ln\left(1 - \sin\frac{t}{n}\right)\right) \\ &\leqslant \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\,\frac{t}{n}\right)\right) \\ &\leqslant \exp\left(-n\,\frac{2t}{\pi n}\right) = e^{-2t/\pi}, \end{aligned}$$

où $t \mapsto e^{-2t/\pi}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors le théorème s'applique : les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = 1.$$

135 — **CCP**

Puisque les f_n sont impaires, il suffit de mener l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et si $x > 0$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence uniforme. Avec $x_n = 2^{-n/2}$ de sorte que $2^n\,x_n^2 = 1$,

$$f_n(x_n) = \frac{2^{n/2}}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{2^n\,x}{n\,2^n\,x^2} = \frac{1}{nx} \leqslant \frac{1}{na} = \alpha_n.$$

La suite (α_n) ne dépend pas de x et tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

136 — **MP**

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 1\}$. De plus, $\lim_{|x|\to 1} \varphi(x) = 0$ car

$$\lim_{|x|\to 1} \frac{-1}{1-x^2} = -\infty.$$

Alors φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \varphi(x)\,e^{-n^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $t = nx$, qui est un changement de variable bijectif et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions $f_n : t \mapsto \varphi(t/n)\,e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$; par continuité de φ en 0, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : t \mapsto \varphi(0)\,e^{-t^2}$, continue sur $\mathbb{R}$; et enfin, on a la domination :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(t)| \leqslant f(t),$$

où f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto e^{-t^2}$ l'est.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, les f_n (et f !) sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f.$$

Autrement dit, la limite cherchée vaut

$$\varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{e}.$$