Quatorzième feuille d'exercices

Séries de fonctions

137 — CCP

1. Déterminer le domaine sur lequel converge simplement la série des fonctions $f_n : x \mapsto n\,x\,e^{-n x^2}$.

2. Y converge-t-elle uniformément ?

138 — CS

Étudier $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}\,n}{n^2+x^2}$.

139 — CCP

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n x} \sin(n\,x).$$

1. Montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. L'expliciter.

140 — CCP

1. Définition et continuité de la fonction

$$f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t} \cos(n\,t) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right).$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

141 — CS

Définition, continuité, classe $\mathscr{C}^1$, intégrabilité de

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2\,x^2}.$$

142 — CCP

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\,t)}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n}{n^2+x^2}.$$

143 — CCP

Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ à 10^{-3} près.

144 — TPE

1. Domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

2. Exprimer f à l'aide des fonctions Γ et

$$\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

145 — CCP

Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]\,,\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

Si cela a un sens, on pose $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Étudier la classe $\mathscr{C}^1$ de f sur $[0,1]$.

2. Calculer $f'(1)$.

146 — MP

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-n x}}{n+1}$.

1. Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. On note f sa somme. Est-elle continue ? dérivable ?

3. Donner ses limites en 0 et $+\infty$.