Corrigés des exercices de la quatorzième feuille

137 ————— CCP

1. Les fonctions f_n sont impaires, donc il suffit de mener l'étude sur $\mathbb{R}_+$. On voit que $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| = f_n(x) \ll 1/n^2$, où $\sum 1/n^2$ converge donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. Finalement, $\sum f_n$ converge simplement et absolument sur $\mathbb{R}$.

2. Grâce à la convergence simple, la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ équivaut à celle de la suite des restes (R_n) vers la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$. Comme on n'ajoute que des termes positifs,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} kx e^{-kx^2} \geq (n+1)x e^{-(n+1)x^2}.$$

Alors

$$R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq e^{-1/(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0.$$

Cela signifie que la suite de fonctions (R_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

138 ————— CS

CONVERGENCE NORMALE. $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = 1/n$ donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

CONVERGENCE SIMPLE. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Utilisons le critère spécial des séries alternées. Clairement, $(-1)^n f_n(x)$ ne change pas de signe et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$. Pour étudier la décroissance de la suite $(|f_n(x)|)$, introduisons $g : y \mapsto \frac{y}{y^2 + x^2}$, de sorte que $|f_n(x)| = g(n)$. Pour tout $y \geq 0$,

$$g'(y) = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Il s'ensuit que $g'(y) < 0$ pour $y > |x|$: ainsi, $(|f_n(x)|)$ décroît à partir du rang $N = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Du coup, $\sum f_n(x)$ converge d'après le critère des séries alternées, donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

CONVERGENCE UNIFORME. On voit que le rang à partir duquel $(|f_n(x)|)$ décroît dépend de x , donc a priori on ne peut pas utiliser le critère spécial des séries alternées de façon uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $N = \lfloor \max(|a|, |b|) \rfloor + 1$. La suite $(|f_n(x)|)_{n \geq N}$ décroît pour tous les x de $[a, b]$ donc on peut utiliser le critère spécial des séries alternées : pour $n \geq N$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est majoré par le premier terme négligé : $|R_n| \leq |f_{n+1}| \leq 1/n$. Ainsi, la suite (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, b]$, et $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

139 ————— CCP

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto e^{-nx} \sin(nx)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x > 0$, $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$, où $\sum e^{-nx}$ converge, comme série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$. Donc $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par opérations usuelles.

D'après l'étude de la question précédente, écartons-nous de 0. Soient $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| \leq e^{-na}$, où $\sum e^{-na}$ ne dépend pas de x et converge car $a > 0$, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Alors, f est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$, donc elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(-1+i)nx} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - e^{(-1+i)x}} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{(-1-i)x}}{(1 - e^{(-1+i)x})(1 - e^{(-1-i)x})} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{(-1-i)x}}{1 - e^{-x}(e^{ix} + e^{-ix}) + e^{-2x}} \right) \\ &= \frac{e^{-x} \sin x}{1 - 2e^{-x} \cos x + e^{-2x}} = \frac{\sin x}{2(\operatorname{ch} x - \cos x)}. \end{aligned}$$

La série géométrique rencontrée converge car $e^{(-1+i)x} \notin \mathbb{R}$ donc $e^{(-1+i)x} \neq 1$.

140 ————— CCP

1. Les fonctions

$$f_n : t \mapsto e^{-t} \cos(nt) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. Soit un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [a, b]$,

$$|f_n(t)| = e^{-t} |\cos(nt)| \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) \leq e^{-a} \frac{2}{n^2}.$$

Comme $\sum 1/n^2$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Alors la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. En particulier, les f_n et f sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$, $|f_n(t)| \leq 2e^{-t}/n^2$. Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n aussi. On en tire aussi que

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \frac{2}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{2}{n^2}$$

donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge. Alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(nt) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t+int} dt \right) = \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Alors,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

141 ————— **CS**

Les fonctions $f_n : x \mapsto 1/(n + n^2 x^2)$ sont paires, menons donc leur étude sur $\mathbb{R}_+$.

DÉFINITION. Étudions la convergence simple de $\sum f_n$. Comme $f_n(0) = 1/n$, $\sum f_n(0)$ diverge. Pour $x > 0$, $0 \leq f_n(x) \leq 1/(n^2 x^2)$ et $\sum 1/n^2$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

CONTINUITÉ. Soit un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [a, b]$, $0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

CLASSE $\mathcal{C}^1$. Les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{-2n^2 x}{(n + n^2 x^2)^2} \right| \leq \frac{2n^2 b}{(n + n^2 a^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2b}{a^4 n^2}$$

donc $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a vu plus haut que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$.

INTÉGRABILITÉ. Les f_n sont continues et positives sur $\mathbb{R}_+^*$, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour somme f qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, f_n est continue en 0, $f_n(x) \leq 1/(n^2 x^2)$ et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{n + n^2 x^2} = \left[\frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{n}x)}{n^{3/2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n^{3/2}}.$$

Or $\sum 1/n^{3/2}$ converge, donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge. Alors, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \frac{\pi}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

142 ————— **CCP**

EXISTENCE. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale converge car la fonction $t \mapsto \cos(xt)/(e^t + 1)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$: en effet, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{|\cos(xt)|}{e^t + 1} \leq e^{-t}.$$

CALCUL FORMEL. Voici un calcul formel. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t(1 + e^{-t})} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{ixt-t-nt} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1-ix)} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-ix} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + x^2}. \end{aligned}$$

JUSTIFICATION. Et maintenant, justifions le calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $f_n : t \mapsto (-1)^n e^{-t(n+1-ix)}$. Il s'agit de prouver que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n.$$

Mais

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)} dt = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ diverge et le théorème auquel on pense ne s'applique pas.

Changeons de tactique. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $S_N = \sum_{n=0}^N f_n$. Alors les S_N sont continues sur $\mathbb{R}_+$, (S_N) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers

$$S : t \mapsto \frac{e^{ixt} e^{-t}}{1 + e^{-t}}$$

qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, on a la domination suivante : pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$, $|S_N(t)| \leq 2e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, le théorème de convergence dominée s'applique : S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce que l'on savait déjà), et l'on peut écrire

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} S_N = \int_{\mathbb{R}_+} S.$$

Autrement dit, comme

$$\int_{\mathbb{R}_+} S_N = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n=0}^N f_n = \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} f_n,$$

on obtient ce que l'on voulait :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

143 ————— **CCP**

L'idée est de décomposer e^{-t^2} en somme d'une série et de permuter avec l'intégrale. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

En notant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n}/n!$, $\|f_n\|_{\infty}^{[0,1]} = 1/n!$ et $\sum 1/n!$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$. Comme les f_n

sont continues sur $[0, 1]$, on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t^2} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}. \end{aligned}$$

L'intégrale est donc approchée par les sommes partielles S_n de cette série alternée. En vertu du théorème spécial des séries alternées, le reste est majoré comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} = M_n.$$

Comme on veut une valeur approchée à 10^{-3} près, il suffit de choisir n tel que ce majorant soit inférieur à 10^{-3} . En calculant les premiers termes, on trouve que

$$M_3 = \frac{1}{216}, \quad M_4 = \frac{1}{1320} \leq 10^{-3}$$

donc il suffit de prendre $n = 4$. Ainsi, à 10^{-3} près,

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt \approx S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,747.$$

En outre, comme la somme est encadrée par les sommes partielles d'indices pairs et impairs, cette approximation est à 10^{-3} près par excès.

144 ————— **TPE**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{t^x}{e^t - 1}.$$

Par opérations usuelles, elle est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $h(t) \ll_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/2}$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc h l'est sur $[1, +\infty[$.

Enfin, pour tout $t \in]0, 1]$, $h(t) \sim_{t \rightarrow 0} 1/t^{1-x}$. Or, $t \mapsto 1/t^{1-x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1-x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$. Donc h est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

Finalement, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x > 0$. Voici un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

CALCUL FORMEL.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \\ (1) \quad &= \int_0^{+\infty} t^x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n dt \\ (2) \quad &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^x e^{-nt} dt \\ (3) \quad &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du \end{aligned}$$

$$(4) \quad = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

$$(5) \quad = \Gamma(x+1) \zeta(x+1).$$

JUSTIFICATIONS. Voici les justifications des égalités précédentes.

(1) Pour tout $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc la série géométrique $\sum_{n \geq 1} e^{-nt}$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

(2) Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : t \mapsto t^x e^{-nt}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_n(t) \ll_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/2}$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n l'est aussi. D'après (1), $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme est h , qui est continue sur I . Pour valider la convergence de $\sum \int_I |f_n|$, faisons le calcul qui valide (3).

(3) Le changement de variable $u = nt$ est bijectif et $\mathcal{C}^1$ de I dans I , et comme les f_n sont intégrables sur I , on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} f_1(u) du.$$

FIN DU (2). Ainsi, $\int_I |f_n| = C/n^{x+1}$, où C ne dépend pas de n . Or $x > 0$ donc $x+1 > 1$ et $\sum 1/n^{x+1}$ converge. Alors $\sum \int_I |f_n|$ converge, et l'on peut permuter : (2) est justifiée.

(4) Comme $x+1 > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^{(x+1)-1} e^{-u} du.$$

(5) Par construction, ζ est définie sur $]1, +\infty[$, donc $\zeta(x+1)$ a un sens.

145 ————— **CCP**

1. $\circ$ Par opérations usuelles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$u'_n(x) = \frac{1}{n(1 + \frac{x}{n})} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}.$$

$\circ$ Soit $x \in [0, 1]$. Quand n augmente,

$$u_n(x) = \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{x}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ converge comme série de Riemann où $2 > 1$, donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

$\circ$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$|u'_n(x)| = \frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or ce majorant ne dépend pas de x et on l'a dit, $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

Alors

• S est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$

- et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$S'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

2. D'après le calcul précédent,

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1,$$

où l'on a reconnu une somme télescopique.

146 ————— **MP**

1. CONVERGENCE SIMPLE. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$, $f_n(0) = 1/(n+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} 1/n$ et $\sum f_n(0)$ diverge. Enfin, si $x > 0$, $0 < f_n(x) < e^{-nx}$, où $\sum e^{-nx}$ converge comme série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$, donc $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

CONVERGENCE UNIFORME SUR $[a, +\infty[$ où $a > 0$. On se doute que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. On voit que la convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$ suffit pour la suite de l'exercice.

Soient $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} \\ &= \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{e^{-(n+1)a}}{1 - e^{-a}}. \end{aligned}$$

Ce dernier majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 avec n , donc (R_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction nulle, et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Commentaire. On a traité la convergence uniforme pour répondre à la question, mais la convergence normale est encore plus simple et suffit pour la suite.

2. Puisque les f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$ d'après ce qui précède, la somme f est continue sur ces intervalles. Comme $a > 0$ est arbitraire, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$f'_n(x) = - \frac{ne^{-nx}}{n+1}.$$

En outre, pour $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$,

$$|f'_n(x)| = \frac{ne^{-nx}}{n+1} \leq e^{-na}.$$

Or e^{-na} ne dépend pas de x et $\sum e^{-na}$ converge comme série géométrique de raison $e^{-a} \in [0, 1[$, donc $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Il s'ensuit que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall x \geq a, f'(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ne^{-nx}}{n+1}.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$, elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. LIMITE EN $+\infty$. On a vu que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, par exemple. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Notons ℓ_n ces limites. D'après le théorème de la double limite, la série $\sum \ell_n$ converge et f admet une limite en $+\infty$ qui vaut

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

LIMITE EN 0. On imagine que f tend vers $+\infty$ en 0. Prouvons-le.

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k+1} \geq \sum_{k=0}^n \frac{e^{-kx}}{k+1} \geq e^{-nx} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

En choisissant $x_n = 1/n$,

$$f(x_n) \geq e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Comme la suite (x_n) décroît vers 0 et que f décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $f' \leq 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$