Quinzième feuille d'exercices

Espaces préhilbertiens & euclidiens

147 — MP

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geqslant \frac{2}{n\,(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2.$$

148 — EIVP17

Déterminer $\displaystyle \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - a\,x - b)^2 \,\mathrm{d}x$.

149 — WP

Soit E l'espace des suites réelles bornées.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$,

$$(u\,|\,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n\,v_n}{2^n}.$$

2. Soit F le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang.

a. Déterminer $F^{\perp}$.

b. F admet-il un supplémentaire orthogonal ?

150

Soient un entier $n \geqslant 2$, $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel et $A \in E$. Montrer que l'application

$$\varPhi_A : E \to E,\ M \mapsto A\,M^{\top} A$$

est un endomorphisme autoadjoint de E.

151 — WP

Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel. Trouver le supplémentaire orthogonal de $H = \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$. En déduire $d(M, H)$ pour $M \in E$.

152 — CCP

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y - z = 0$.

153 — ENSEA

Dans l'espace $E = \mathscr{C}^2([0,1]\,, \mathbb{R})$, montrer que l'on définit un produit scalaire en posant

$$(f\,|\,g) = \textstyle\int_0^1 (f(t)\,g(t) + f'(t)\,g'(t))\,\mathrm{d}t.$$

154 — CCP16

Reconnaitre l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

155 — CS

Considérons $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$(P\,|\,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

et l'application δ définie par $\delta(P) = P(0)$.

1. Montrer l'existence d'un unique $\varOmega \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\delta(P) = (\varOmega\,|\,P)$.

2. Montrer que ce résultat est faux dans $\mathbb{R}[X]$.

156 — CCP16

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^{\top} B.$$

157 — WP

Soit $a \neq 0$ un vecteur de $E = \mathbb{R}^3$ euclidien usuel.

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \wedge (a \wedge x)$ est un endomorphisme autoadjoint de E.

2. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

3. En déduire une base orthonormée de E de diagonalisation de f.

158

Dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ euclidien usuel, trouver la distance à l'espace des matrices symétriques de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

159 — WP

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 4\,I_2 = 0$ et $M^{\top} M = M\,M^{\top}$. On pose $S = M^{\top} M$.

a. Montrer que $S \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

b. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S.

c. En déduire que $\frac{1}{2}\,M \in O(2)$.

2. Déterminer toutes les matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + 4 I_2 = 0$ et $M^{\top} M = M\,M^{\top}$.