Corrigés des exercices de la quinzième feuille

147 ————— **MP**

Dans $\mathbb{R}^{n-1}$ euclidien usuel, soient $x = (x_p)$ et $y = (y_p)$ définis par $x_p = \frac{\sqrt{p}}{n-p}$ et $y_p = \sqrt{p}$. Alors, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{p=1}^{n-1} x_p y_p \right)^2 &\leq \left(\sum_{p=1}^{n-1} x_p^2 \right) \left(\sum_{p=1}^{n-1} y_p^2 \right) \\ \iff \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2 &\leq \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \right) \left(\sum_{p=1}^{n-1} p \right) \end{aligned}$$

où l'on reconnaît l'inégalité demandée avec

$$\sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

148 ————— **EIVP17**

Considérons l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire usuel $(P|Q) = \int_0^1 PQ$. Alors la borne inférieure cherchée est le carré de la distance de X^2 à $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Plutôt que de chercher une base orthonormée de F , cherchons son orthogonal. En effet, puisque F est un hyperplan de E , $F^\perp$ est une droite $\mathbb{R}N$ où N est normal à F .

Le polynôme N ne peut pas être de degré inférieur ou égal à 1, sinon il serait dans F . Choisissons

$$N = X^2 + pX + q.$$

Il est orthogonal à la base $(1, X)$ de F , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (1|N) = 0 &\quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2}p + q = 0; \\ (X|N) = 0 &\quad \text{donc} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q = 0. \end{aligned}$$

Alors $p = -1$, $q = \frac{1}{6}$ et $N = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

L'intérêt de ce choix est que l'on voit immédiatement que $X^2 = N + X - \frac{1}{6}$, où $X - \frac{1}{6} \in F$. Donc le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}N$ est N et le carré de la distance de X^2 à F est $\|N\|^2 = \frac{1}{180}$. En outre, cette borne inférieure est atteinte pour $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.

149 ————— **WP**

1. Pour commencer, pour u et v dans E , la série converge bien, car u et v sont bornées et la série géométrique $\sum 2^{-n}$ converge absolument.

$(\cdot|\cdot)$ est symétrique, par commutativité du produit des réels.

$(\cdot|\cdot)$ est linéaire à droite, par distributivité du produit sur la somme dans $\mathbb{R}$, puis par linéarité de la somme des séries convergentes. Donc par symétrie, $(\cdot|\cdot)$ est aussi linéaire à gauche.

Enfin, $(\cdot|\cdot)$ est défini positif. En effet, pour $u \in E$:

$$(u|u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{2^n} \geq 0.$$

Et si $(u|u) = 0$, comme il s'agit d'une somme de réels positifs, ces réels sont tous nuls : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = 0$, donc $u_n = 0$ et $u = 0$.

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire.

2.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ la suite qui comporte un 1 en position n , en commençant à compter à la position 0 — comme en python :-). On voit que $F = \text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Alors, si $v \in F^\perp$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \perp e_n$, donc $v_n = 0$. Ainsi $v = 0$ et $F^\perp = \{0\}$.

Commentaire. On aura reconnu que $F = \mathbb{R}[X]$.

2.b. Il s'ensuit que $F \oplus F^\perp = F \subsetneq E$, donc F n'a pas de supplémentaire orthogonal, car le seul possible est $F^\perp$, qui n'est pas supplémentaire de F .

150 —————

Clairement $\Phi_A \in \mathfrak{L}(E)$. Soient P et Q dans E :

$$\begin{aligned} (P|\Phi_A(Q)) &= \text{Tr}(P^\top \Phi_A(Q)) = \text{Tr}(P^\top A Q^\top A) \\ &= \text{Tr}(A P^\top A Q^\top) = \text{Tr}(Q^\top A P^\top A) = (Q|\Phi_A(P)) \end{aligned}$$

et Φ_A est autoadjoint.

151 ————— **WP**

Tr est une forme linéaire non nulle donc H est un hyperplan de E et son orthogonal est une droite.

Pour A et B dans E , $(A|B) = \text{Tr}(A^\top B)$. Soit $M \in E$: $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(I_n^\top M) = (I_n|M)$, donc $M \in H$ si et seulement si $(I_n|M) = 0$, donc $H^\perp \subset \mathbb{R}I_n$, et comme $H^\perp$ est une droite, $H^\perp = \mathbb{R}I_n$.

Soit $M \in E$: il existe un unique $(\lambda, N) \in \mathbb{R} \times H$ tel que $M = \lambda I_n + N$. Alors $\text{Tr}(M) = \lambda \text{Tr}(I_n) = n\lambda$. Donc $d(M, H) = \|\lambda I_n\| = n|\lambda| = |\text{Tr}(M)|$.

152 ————— **CCP**

Notons $\cdot$ le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^3$, (i, j, k) sa base canonique et p le projecteur orthogonal sur le plan P . Un vecteur normal à P est $n = (1, 1, -1)$. Le projeté orthogonal de i sur $\mathbb{R}n$ est

$$\frac{i \cdot n}{n \cdot n} n = \frac{1}{3} n,$$

donc son projeté orthogonal sur P est

$$p(i) = i - \frac{i \cdot n}{n \cdot n} n = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

De même, $p(j) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ et $p(k) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$. Finalement, la matrice de p dans (i, j, k) est

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

153 ————— **ENSEA**

Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et linéarité de la dérivation et de l'intégrale, $(\cdot|\cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire. Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale, $(f|f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2) \geq 0$. Enfin, si $(f|f) = 0$, comme la fonction $f^2 + f'^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$, elle y est nulle. Comme $f^2 + f'^2 = 0$ et que $f^2 \geq 0$ et $f'^2 \geq 0$, on a donc $f^2 = f'^2 = 0$: en particulier, $f = 0$.

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc c'est un produit scalaire euclidien.

154 ————— **CCP16**

Clairément, $A^\top A = I_3$ et $A \in O_3(\mathbb{R})$. De plus, sans difficulté,

$$E_1(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'endomorphisme f associé à A est une rotation autour de cette droite, d'un certain angle θ . Or $\text{Tr } A = 2 \cos \theta + 1$ donc $\theta = \text{Arccos}(-\frac{5}{6})$.

155 ————— **CS**

1. D'après le théorème de représentation, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et que δ est clairement une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\exists! \Omega \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta(P) = (\Omega|P).$$

2. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\Omega \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\delta(P) = (\Omega|P)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aurait alors

$$|\delta(P)| = |(\Omega|P)| \leq \|\Omega\| \|P\|.$$

Nous aboutirons à une contradiction si nous trouvons des polynômes P_n tels que $\|P_n\|$ soit bornée avec n , et pas $\delta(P_n) = P_n(0)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \sqrt{2n+1}(1-X)^n$, de sorte que

$$\|P_n\| = \int_0^1 P_n^2(t) dt = \int_0^1 (2n+1)(1-t)^{2n} dt = 1$$

et $P_n(0) = \sqrt{2n+1}$. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2n+1} \leq \|\Omega\|$, ce qui est impossible. Donc il n'existe aucun $\Omega \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\delta(P) = (\Omega|P)$.

156 ————— **CCP16**

CONDITION NÉCESSAIRE. Supposons que A soit symétrique positives. Alors $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et il existe $\Omega \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = \Omega D \Omega^\top$, où les $\lambda_i \geq 0$ sont les valeurs propres de A , non nécessairement distinctes. Introduisons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Comme $\Omega^\top \Omega = I_n$, on peut écrire

$A = \Omega D \Omega^\top = \Omega \Delta^2 \Omega^\top = \Omega \Delta \Omega^\top \Omega \Delta \Omega^\top = B^\top B$, en posant $B = \Omega \Delta \Omega^\top$. En passant, ici, $B^\top = B$, et l'on a en fait prouvé qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B = B^2$.

CONDITION SUFFISANTE. Supposons que l'on ait $A = B^\top B$, où $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. D'une part, $A^\top = A$ et A est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles. D'autre part, pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}} A$, et tout $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$, on a d'une part, $X^\top A X = X^\top \lambda X = \lambda X^\top X$, et d'autre part, $X^\top A X = X^\top B^\top B X = (B X)^\top B X$. Comme $(B X)^\top B X \geq 0$ et $X^\top X > 0$ car $X \neq 0$,

$$\lambda = \frac{(B X)^\top B X}{X^\top X} \geq 0,$$

et $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \mathbb{R}_+$. Ainsi, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

157 ————— **WP**

1. Par linéarité à droite du produit vectoriel, f est clairement un endomorphisme de E .

Soient x et y dans E . En utilisant le produit mixte,

$$\begin{aligned} (f(x)|y) &= (a \wedge (a \wedge x)|y) = [a, a \wedge x, y] \\ &= -[a, y, a \wedge x] = -(a \wedge y|a \wedge x). \end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en x et y , f est autoadjoint.

2. Soit $x \in \text{Ker}(f)$: $a \wedge (a \wedge x) = 0$, donc a et $a \wedge x$ sont liés. Mais $a \wedge x$ est orthogonal à a , donc le seul moyen qu'il soit aussi lié à a , est qu'il soit nul. Ainsi, $a \wedge x = 0$, ce qui signifie que x et a sont liés. Donc $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}a$. Mais clairement $f(a) = 0$ donc $\mathbb{R}a \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}a$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$: il s'écrit $y = a \wedge (a \wedge x)$ où $x \in E$, donc $y \perp a$ et $\text{Im}(f) \subset a^\perp$. Mais $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ d'après le théorème du rang. Et bien-sûr, $\dim(a^\perp) = \dim(E) - \dim(\mathbb{R}a) = 2$. Donc $\text{Im}(f) = a^\perp$.

3. On sait que $E = \mathbb{R}a \oplus a^\perp$. Considérons une base orthonormée adaptée à cette somme directe, comme suit : soit $u = a/\|a\| \in \mathbb{R}a$; soit v un vecteur unitaire quelconque de $a^\perp$; soit $w = u \wedge v$. La base (u, v, w) convient et elle est même directe.

Comme $u \in \mathbb{R}a = \text{Ker}(a)$, $f(u) = 0$. En outre,

$$\begin{aligned} f(v) &= a \wedge (a \wedge v) = \|a\|^2 u \wedge (u \wedge v) \\ &= \|a\|^2 u \wedge w = -\|a\|^2 v. \end{aligned}$$

Et de même, $f(w) = -\|a\|^2 w$. Ainsi,

$$\text{Mat}_{(u,v,w)}(f) = -\|a\|^2 \text{diag}(0, 1, 1).$$

158 —————

On a $M = S + A$ où $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ est symétrique et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$ est antisymétrique. Comme les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux, la distance cherchée est $\|A\| = \sqrt{21}$.

159 ————— **WP**

1.a. Clairement, $S^\top = (M^\top M)^\top = M^\top M = S$ et $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On a

$$X^\top S X = X^\top M^\top M X = (M X)^\top (M X) = \|M X\|^2,$$

où l'on reconnaît la norme euclidienne usuelle de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, comme $M^2 = -4I_2$, M est inversible, donc $M X \neq 0$ car $X \neq 0$. Alors

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top S X > 0$$

et $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

1.b. Comme M et $M^\top$ commutent, on a

$$\begin{aligned} S^2 &= (M^\top M)^2 = (M^\top)^2 M^2 \\ &= (-4I_2)^\top (-4I_2) = 16I_2. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $X^2 - 16$ est annulateur de S .

1.c. Alors, les valeurs propres de S sont parmi les racines de ce polynôme : $\text{Sp}(S) \subset \{-4, 4\}$. Or $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^* : \text{Sp}(S) \subset \{4\}$. Et

comme S est diagonalisable, puisqu'elle est symétrique réelle, $\text{Sp}(S) = \{4\}$. Alors S est semblable à $4I_2$, donc $S = 4I_2$.

Ainsi, $\frac{1}{4}S = I_2$, ou encore $(\frac{1}{2}M)^\top (\frac{1}{2}M) = I_2$ et $\frac{1}{2}M \in O(2)$.

2. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le second cas ne convient pas. En effet, on aurait $(\frac{1}{2}M)^2 = I_2$ alors qu'on veut $(\frac{1}{2}M)^2 = -I_2$.

Dans le premier cas,

$$\left(\frac{1}{2}M\right)^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = -I_2,$$

donc $2\theta = \pi [2\pi]$, d'où $\theta = \frac{\pi}{2} [\pi]$ et

$$M = \pm 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et sans difficulté, ces deux matrices conviennent.

Commentaire. Il s'agit d'une vaste analyse-synthèse.