Corrigés des exercices de la seizième feuille

160 ————— **CCP**

1. Par opérations usuelles, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En particulier, elle y est continue. En outre, en posant $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, (x, y) tend vers $(0, 0)$ si et seulement si ρ tend vers 0. De plus,

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = \rho |\cos \theta \sin \theta| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$. Cela signifie que f est continue en $(0, 0)$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Par symétrie des rôles joués par x et y , étudions seulement la dérivabilité par rapport à x . Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Par ailleurs, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. Enfin, en utilisant encore le changement de coordonnées polaires,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sin^3 \theta.$$

Et l'on voit que si l'on choisit $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette dérivée partielle vaut 1 et ne tend pas vers 0 quand ρ tend vers 0. Cela signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$ donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

161 ————— **AM**

1. Étudions la continuité à l'aide des coordonnées polaires :

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho(\cos^3 \theta - \sin^3 \theta).$$

On voit que $f(x, y)$ tend vers $0 = f(0, 0)$ quand ρ tend vers 0, donc f est continue en $(0, 0)$. Bien-sûr, d'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Étudions l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$. Par définition,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1. \end{aligned}$$

Ensuite, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Toujours avec les coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ = \cos^4 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin^3 \theta, \end{aligned}$$

et cette expression n'admet pas de limite quand ρ tend vers 0. Ainsi, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

162 ————— **CCP**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x, 2x) = 2x^2 - 2x^3$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 2x) = \mp\infty$. Ainsi, f n'est pas bornée et n'a pas d'extrémum global sur $\mathbb{R}^2$.

2. f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, si (a, b) est un extrémum de f , c'est un point critique, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y + 2xy - y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + x^2 - 2xy. \end{aligned}$$

On voit que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \neq 0$, donc $(1, 2)$ n'est pas un extrémum local de f .

En revanche, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ et $(0, 0)$ est un point critique de f . Étudions alors la hessienne de f en $(0, 0)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y & 1 + 2x - 2y \\ 1 + 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On voit que $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et -1 . Elles sont de signes contraires donc $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de f .

De même, on voit que $(-1, 0)$ est un point critique de f . Pour varier, plutôt que d'étudier la hessienne faisons un développement limité de f en $(-1, 0)$ à l'ordre 2. Pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(-1 + h, k) = -hk + k^2 + o(h^2 + k^2).$$

Alors, quand h est proche de 0,

$$\begin{aligned} f(-1 + h, 2h) &= 2h^2 + o(h^2) \geq 0, \\ f(-1 + 2h, h) &= -h^2 + o(h^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $(-1, 0)$ n'est pas un extrémum local de f .

163 ————— **MP**

Voici deux résolutions complètement différentes.

PREMIÈRE MÉTHODE. Pour $n = 1$, c'est évidemment vrai. On suppose donc $n \geq 2$. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, posons $u_k = x_k/x_{k+1}$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n-1} u_k$. Alors $x_n/x_1 = 1/p_n$. Soit la fonction

$$f \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R}_+^*)^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \frac{1}{p_n}. \end{array} \right.$$

Il s'agit de prouver que la fonction f admet n comme minimum global.

L'ensemble de définition de f étant un ouvert, dans un premier temps on cherche les points critiques de f . Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = 0 \iff 1 - \frac{1}{u_i p_n} = 0 \iff u_i = \frac{1}{p_n}.$$

Il s'ensuit que les u_i sont tous égaux et valent u_1 , donc $u_1 = 1/u_1^{n-1}$ et $u_1 = 1$. Finalement le seul point critique de f est $a = (1, \dots, 1)$.

Posons $H = H_f(a)$. Pour tout $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(u) = \frac{2}{u_i^2 p_n} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u) = \frac{1}{u_i u_j p_n}$$

donc

$$H = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}.$$

Écrivons $H = I_n + J$ où J la matrice remplie de 1. On voit que $H - I_n = J$ est de rang exactement 1, donc 1 est valeur propre d'ordre $n-1$ de H . De plus, comme la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, si λ est l'autre valeur propre de H , on a $\text{Tr}(H) = 2n = n-1 + \lambda$, d'où $\lambda = n+1$. Alors $\text{Sp}(H) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que a est un minimum local de f . Comme c'est le seul extrémum puisque l'on est sur un ouvert, c'est donc un minimum global.

Finalement, pour tout u , $f(u) \geq n$. On en tire l'inégalité de l'énoncé.

DEUXIÈME MÉTHODE. Posons $y_i = x_i/x_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $y_n = x_n/x_1$. Alors, le produit des y_i vaut 1 et

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} &\geq n \\ \iff \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} &\geq \sqrt[n]{y_1 \dots y_n}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité dit que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, ce qui est toujours vrai, et que l'on peut déduire de la concavité du logarithme. Donc l'inégalité du départ est vraie.

164 ————— **CCP**

Nommons S la surface.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Le plan tangent TS_{M_0} à S en M_0 a pour équation cartésienne

$$\frac{1}{4} 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + \frac{1}{4} 2z_0(z-z_0) = 0$$

c'est-à-dire $\frac{1}{4} x_0 x + y_0 y + \frac{1}{4} z_0 z = 1$.

L'intersection $TS_{M_0} \cap (Ox)$ est non vide si et seulement si $x_0 \neq 0$. Dans ce cas, $TS_{M_0} \cap (Ox) = \{A\}$, où $A = (4/x_0, 0, 0)$. De même, $TS_{M_0} \cap (Oy)$ est non vide si et seulement si $y_0 \neq 0$ et $TS_{M_0} \cap (Oy) = \{B\}$, où $B = (0, 1/y_0, 0)$. Enfin, $TS_{M_0} \cap (Oz)$ est non vide si et seulement si $z_0 \neq 0$ et $TS_{M_0} \cap (Oz) = \{C\}$, où $C = (0, 0, 4/z_0)$.

Alors, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ si et seulement si $4/x_0 = 1/y_0 = 4/z_0$, c'est-à-dire $x_0 = 4y_0 = z_0$. En reportant dans l'équation de S , on a $\frac{1}{4} 16y_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{4} 16y_0^2 = 1$, soit $y_0 = \pm \frac{1}{3}$. Les points cherchés sont donc $M_0(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ et son symétrique autour de O .

165 ————— **MP**

La courbe C est l'intersection des surfaces

$$\begin{aligned} S_1 : x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ \text{et } S_2 : x^2 + y^2 &= Rx. \end{aligned}$$

Soit $M_0 \in C$. Les plans tangents en M_0 à S_1 et à S_2 sont

$$\begin{aligned} TS_1 : x x_0 + y y_0 + z z_0 &= R^2, \\ TS_2 : x x_0 + y y_0 &= \frac{1}{2} R(x + x_0). \end{aligned}$$

Si $M_0 = (R, 0, 0)$, les deux plans sont égaux, et le cours ne permet pas de conclure. Sinon, les deux plans sont sécants, et le cours s'applique : la tangente à C en M_0 est l'intersection

$$TC_{M_0} = TS_1 \cap TS_2.$$

166 ————— **CCP**

1. Introduisons la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xyz - 1$. Nommons $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. On voit que le gradient

$$\nabla f(M_0) = (y_0 z_0, z_0 x_0, x_0 y_0)$$

n'est pas nul, donc M_0 est un point régulier de S . Ainsi, le plan tangent $P_0 = TS_{M_0}$ a pour équation

$$(x-x_0)y_0 z_0 + (y-y_0)z_0 x_0 + (z-z_0)x_0 y_0 = 0,$$

ou encore $x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3$.

2. On cherche le projeté orthogonal $H(x, y, z)$ de O sur $P_0 : H \in P_0$ donc

$$x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3.$$

Le vecteur $\vec{N} = (1/x_0, 1/y_0, 1/z_0)$ est normal à P_0 : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{OH} = \lambda \vec{N}$ donc

$$x = \lambda/x_0, \quad y = \lambda/y_0, \quad z = \lambda/z_0.$$

En reportant dans l'équation de P_0 ,

$$\lambda \left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2} \right) = 3.$$

Alors, le point H s'écrit

$$H = \frac{3}{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}} \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0} \right).$$