Corrigés des exercices de la deuxième feuille

13

La règle de d'Alembert s'applique sans difficulté : le quotient $|u_{n+1}/u_n|$ tend vers $\frac{3}{4} \in [0,1[$ donc la série converge absolument.

14

Le terme général u_n est non nul et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge car

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)^2(1+\frac{1}{n})^{2n}}{2(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2e^2}{27} < 1.$$

15 — TPE

Elle converge car $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \dfrac{1}{n^2}\Big)$.

16 — MP

Convergence. La série converge clairement grâce au théorème spécial des séries alternées.

Somme. Évaluons ses sommes partielles. Constatons que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\frac{1}{3n+2} = \int_0^1 t^{3n+1}\,\mathrm{d}t,$$

donc pour un entier $N \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+2} &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{3n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{3n+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\,\frac{1-(-t^3)^{N+1}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{3N+4}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \frac{t^{3N+4}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{3N+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3N+5} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

donc, à la limite sur N,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} = \int_0^1 \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Pour finir, explicitons cette intégrale avec le module de calcul formel `sympy` de `python`.

```
>>> from sympy import *
>>> t = Symbol('t')
>>> integrate(t/(1 + t**3), (t, 0, 1))
-log(2)/3 + sqrt(3)*pi/9
```

17 — ENSEA

Convergence. Notons u_n le terme général : $u_n \sim 1/n^3$. La série de Riemann $\sum 1/n^3$ converge car $3 > 1$, donc $\sum u_n$ converge.

Somme. Décomposons u_n en éléments simples :

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Malheureusement, on ne peut pas séparer la somme de la série, car les séries auxquelles on pense divergent. Mais, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

18 — CCP

1. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in\,]0,1[$. En effet, $u_0 \in\,]0,1[$ et si $u_n \in\,]0,1[$, $u_{n+1} > 0$ et

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2}(u_n + u_n^2) < \tfrac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n < 1.$$

Donc la suite (u_n) est bornée. En passant, elle décroit strictement, car on a vu que $u_{n+1} < u_n$. Alors, elle converge vers $\ell \in [0,1[$. Par continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + x^2)$, ℓ doit être l'un des points fixes de f, 0 ou 1 : alors $\ell = 0$, car 1 est strictement supérieur à (u_n) qui décroit. Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+u_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1,$$

donc d'après règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

2. Posons $v_n = 2^n u_n$. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n,$$

donc

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln(1+u_n) \sim u_n.$$

Comme la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de la série $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$, donc la suite $(\ln(v_n))$ converge. Par continuité de l'exponentielle, la suite (v_n) converge.

19 — CCP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} u_k$. Évaluons S_{5n} pour de petites valeurs de n. On a

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{5}{5} = \sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k}.$$

De même,

$$S_{10} = S_5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{4}{10}$$
$$= S_5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{5}{10}$$
$$= \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k}.$$

Montrons par récurrence sur n que

$$S_{5n} = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}.$$

On vient d'initialiser la récurrence pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons que ce soit vrai au rang n. Alors

$$S_{5n+5} = S_{5n} + \sum_{p=1}^{4} \frac{1}{5n+p} - \frac{4}{5n+5}$$
$$= S_{5n} + \sum_{p=1}^{4} \frac{1}{5n+p} + \frac{1}{5n+5} - \frac{5}{5n+5}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} + \sum_{p=1}^{5} \frac{1}{5n+p} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \sum_{k=n+2}^{5n+5} \frac{1}{k}$$

et la transmission est acquise.

Alors par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{5n} = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}.$$

2. Pour trouver la limite de (S_{5n}), effectuons une comparaison série-intégrale. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

donc en sommant pour $k \in [\![n+1, 5n]\!]$,

$$\ln\left(\frac{5n+1}{n+1}\right) = \int_{n+1}^{5n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_{5n} \leqslant \int_n^{5n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 5.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} S_{5n} = \ln 5$, d'après le théorème d'encadrement.

Soit maintenant un entier $N \geqslant 5$. Il s'écrit $N = 5n+r$ avec $n \geqslant 1$ et $r \in [\![0, 4]\!]$. Alors

$$S_N = S_{5n} + \sum_{k=1}^{r} u_{5n+k}.$$

Par convention, cette dernière somme est nulle si $r = 0$. Or $0 \leqslant \sum_{k=1}^{r} u_{5n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{4} u_{5n+k}$. Ce majorant est la somme de quatre termes qui tous tendent vers 0 quand n — donc N — tend vers $+\infty$, donc elle tend aussi vers 0. Ainsi, $\lim_{N\to+\infty} S_N = \ln 5$. Cela signifie que la série $\sum u_k$ converge et que sa somme est $\ln 5$.

20 — CS

On a

$$u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,)^{n/2}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\,)^{n/2}} \leqslant \frac{1}{2^{n/2}}.$$

Or la série $\sum 1/2^{n/2}$ converge comme série géométrique de raison $1/\sqrt{2} \in [0, 1[$ donc $\sum u_n$ converge.

21 — ENSEA

On a

$$u_n = \exp(-\ln n \ln\ln n) = n^{-\ln\ln n} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}}.$$

Comme $\lim \ln\ln n = +\infty$, à partir d'un certain rang, $\ln\ln n \geqslant 2$ donc $u_n \leqslant 1/n^2$, donc $\sum u_n$ converge.

22 — CCP

Première étape. Cherchons un équivalent du terme général u_n. Pour n grand, d'une part,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= e \exp\left(-\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= e\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

donc

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{e}{2n}.$$

D'autre part,

$$\ln(n^2 + n) = \ln\left(n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2\ln n + \mathrm{o}(1) \sim 2\ln n,$$

donc $\dfrac{\ln(n^2+n)}{2\ln n} \to 1$, donc $\left(\dfrac{\ln(n^2+n)}{2\ln n}\right)^2 \to 1$ et $\ln^2(n^2+n) \sim 4\ln^2 n$. Bien-sûr, $e^{1/n} \sim 1$. Alors

$$u_n \sim \frac{e}{8n\ln^2 n}.$$

Deuxième étape. Notons v_n cet équivalent et étudions la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto 1/(t\ln^2 t)$ est positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. Donc pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} v_k \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

Commentaire. On commence la somme à $k = 3$ pour éviter la valeur 1 dans la borne inférieure de l'intégrale.

Ainsi, les sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 3} v_n$ sont majorées, donc la série converge.

Conclusion. Comme v_n est positif, u_n l'est aussi, au moins à partir d'un certain rang. Alors, par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

23 CCP

Oui, par majoration, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n v_n| \leqslant \tfrac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

24 CCP

Notons u_n le terme général. Il semble que u_n change de signe, mais le théorème spécial des séries alternées parait difficile à mettre en œuvre. Alors, développons le terme général. Quand n est au voisinage de l'infini,
$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\\ &= n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right.\\ &\qquad \left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\,\frac{1}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$
Alors
$$\begin{aligned}u_n &= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (-1)^n\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (-1)^n\frac{3\pi}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$
La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge absolument car $2>1$, donc la série $\sum \mathrm{O}(1/n^2)$ converge absolument donc converge. En outre, la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série alternée $\sum(-1)^n/n$ converge, donc aussi la série $\sum(-1)^n(3\pi)/(8n)$. Alors, comme u_n est somme de termes généraux de séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.

En revanche, puisque l'on voit que
$$|u_n| \sim \frac{3\pi}{8n}$$
et que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge, la série $\sum |u_n|$ diverge et $\sum u_n$ ne converge pas absolument. Donc elle est semi-convergente.

25 CCP

1. La fonction $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1-\cos x$ est continue et croissante. De plus, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [0,\pi]$, il existe $c \in \,]0,x[$ tel que $f(x)-f(0) = x f'(c)$, c'est-à-dire $f(x) = x\sin c \leqslant x$, car $c \in \,]0,\pi[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$ et la suite (u_n) décroit. Comme elle est minorée, elle converge. Nommons ℓ sa limite. Comme f est continue sur $[0,\pi]$, $f(\ell)=\ell$, donc $\ell = 0$. Ainsi, la suite (u_n) tend vers 0.

2. Si $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et $\sum u_n$ converge.

Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Sachant que $u_n \to 0$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1-\cos(u_n)}{u_n} \sim \frac{u_n^2/2}{u_n} = \frac{u_n}{2} \to 0 < 1,$$
donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

26 CCP

Notons S_n cette somme. Voici deux approches.

Sommes de Riemann. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}}.$$
D'après le théorème des sommes de Riemann, comme la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$ est continue sur $[0,1]$,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = 2(\sqrt{2}-1).$$
Donc, quand n tend vers l'infini,
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\,n,$$
et
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}}+\frac{1}{\sqrt{2}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\,n,$$
car $\frac{1}{\sqrt{2}} \ll n$. Alors
$$S_n \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}.$$

Comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$
Constatons que pour $k=1$, l'intégrale de droite est généralisée mais convergente. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant pour tout $k \in [\![n,2n]\!]$,
$$\int_n^{2n+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant S_n \leqslant \int_{n-1}^{2n}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$
Or
$$\begin{aligned}\int_n^{2n+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_n^{2n+1} &= 2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})\\ &= 2\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\tfrac{1}{n}}-1\right),\end{aligned}$$
et $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\right) = \sqrt{2}-1$, donc
$$\int_n^{2n+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$
Sur le même principe,
$$\int_{n-1}^{2n}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$
Alors, par encadrement,
$$S_n \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$