

Troisième feuille d'exercices

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

27 ————— **MP**

Nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt$.

28 ————— **AM**

Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

29 ————— **AM**

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - e^{-x}} dx$.

30 ————— **ENS**

Calculer $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$.

31 ————— **TPE**

Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1-ix)}}{\sqrt{t}} dt$.

32 —————

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^\alpha}.$$

33 ————— **CCP**

Nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$v_n = (-1)^n \int_0^n e^{-n^2 t^2} dt.$$

34 ————— **CCP**

Étudier l'intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

35 ————— **AM**

Calculer $\int_0^{\pi/2} \ln \tan x dx$ (on posera $x = \frac{\pi}{2} - t$).

36 ————— **MT**

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$.

37 ————— **CCP**

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$ et

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$,

$$I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}.$$

b) Montrer que $I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$.

38 ————— **CCP**

Soit la fonction $f : t \mapsto \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \frac{\sin t}{t}\right)$.

1. Calculer la limite en 0 de $t f(t)$.

2. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, 1]$?