Corrigés des exercices de la troisième feuille

27 — MP

L'intégrande f est continue sur $]0,1[$. D'une part, pour t voisin de 0, $f(t) \sim -\ln t$ et la fonction $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$. D'autre part, pour t voisin de 1, $f(t) \sim (t-1)\ln(1-t) \to 0$ donc f est prolongeable par continuité en 1. Ainsi, f est intégrable sur $]0,1[$ et l'intégrale existe.

28 — AM

Calcul formel. En posant $u = x^2$ et en intégrant par parties,

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \left[\frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{4\,u^{3/2}}\,\mathrm{d}u.$$

Justification. La fonction $g : u \mapsto (1-\cos u)/u^{3/2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $g(u) \sim_0 \frac{1}{2}\sqrt{u}$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et elle est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, $g(u) \leqslant 2/u^{3/2}$. Comme $u \mapsto 1/u^{3/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, g aussi. Alors g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la dernière intégrale converge.

Pour des raisons analogues, le terme entre crochets a bien un sens. Il en découle que la seconde intégrale converge.

Pour finir, le changement de variable est $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, donc la première intégrale converge.

Commentaire. Notons l'importance du choix d'une primitive : toute autre primitive de $u \mapsto \sin u$ que $u \mapsto 1-\cos u$ conduit à un calcul qui n'a pas de sens, car les deux termes de l'intégration par parties divergent.

29 — AM

Convergence de l'intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrande f_n est positive et continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $f_n(x) \sim_0 \frac{1}{2}$ donc f_n se prolonge par continuité en 0 et elle est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, $f_n(x) \ll_{+\infty} e^{-x/2}$ et $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f_n aussi. Finalement, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Calcul de la limite. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{x\,e^{-nx}}{2\,\mathrm{sh}\,x} \leqslant \frac{e^{-nx}}{2}$$

donc
$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}$$

et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

30 — ENS

Convergence. L'intégrande f est continue sur $I =]2,3[$. De plus, $f(x) \sim_2 (x-2)^{-1/2}$ et $x \mapsto (x-2)^{-1/2}$ est intégrable sur $\left]2,\frac{5}{2}\right]$, donc f aussi ; et $f(x) \sim_3 (3-x)^{-1/2}$ donc f est intégrable sur $\left[\frac{5}{2},3\right[$. Finalement, f est intégrable sur I et $\int_I f$ converge.

Calcul. Posons $x = \frac{5}{2} + \frac{t}{2}$: ce changement envoie $]-1,1[$ sur $]2,3[$, et il est licite car $\mathscr{C}^1$ et bijectif. On a

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)\,(3-x)}} = \int_{-1}^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= [2\,\mathrm{Arcsin}\,t]_{-1}^1 = \pi.$$

31 — TPE

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $f : t \mapsto e^{-t(1-ix)}/\sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Et $|f(t)| = e^{-t}/\sqrt{t} \sim_0 1/\sqrt{t}$, où $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc f l'est aussi. Enfin, $|f(t)| \ll_{+\infty} e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f aussi. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale existe.

32

La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\,x^\alpha}$$

donc f_α est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si $\alpha < 2$, et sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

33 — CCP

1. D'abord, u_n est défini pour $n \geqslant 1$. La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(t) \ll_{+\infty} e^{-t}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Posons $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On voit que $\sum u_n$ est alternée. D'une part, comme $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ croît donc la suite de terme général $\int_{n^2}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = I - \int_0^{n^2} f(t)\mathrm{d}t$ décroît. Ainsi, $(|u_n|)$ décroît, comme produit de suites positives et décroissantes. D'autre part, $|u_n| \leqslant I/n \to 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

2. Dans v_n, posons $x = nt$:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_0^{n^2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n\,I}{n} - u_n.$$

La série $\sum (-1)^n I/n$ converge grâce au critère spécial des séries alternées, et $\sum u_n$ converge, donc $\sum v_n$ converge.

34 — CCP

Nommons f la fonction, continue sur $]1,+\infty[$.

Étude sur $]1,2]$. Au voisinage de 1,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1+\mathrm{o}(x-1)}}{(x-1)\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x-1}$ est intégrable sur $]1,2]$, donc f l'est aussi.

Étude sur $[2,+\infty[$. En $+\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} \ll \frac{1}{x^{4/3}}.$$

Comme $\frac{4}{3} > 1$, la fonction $x \mapsto 1/x^{4/3}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$, donc f l'est aussi.

Finalement, f est intégrable sur $]1,+\infty[$.

35 AM

Convergence. La fonction $f : x \mapsto \ln\tan x$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\ln\tan\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \ln\frac{1}{\tan x} = -\ln\tan x,$$

donc $|f(\frac{\pi}{2} - x)| = |f(x)|$. Alors, il suffit d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0, \frac{\pi}{4}]$. Pour x proche de 0,

$$\begin{aligned}\ln\tan x &= \ln(x + \mathrm{O}(x^3)) \\ &= \ln x + \ln(1 + \mathrm{O}(x^2)) \sim \ln x,\end{aligned}$$

donc $|f(x)| \sim |\ln x|$. Comme $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$, f l'est sur $]0, \frac{\pi}{4}]$. Ainsi, l'intégrale converge.

Calcul. De plus, l'égalité $f(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$ montre que le graphe de f est symétrique autour du point $(\frac{\pi}{4}, 0)$, donc l'intégrale est nulle.

36 MT

Convergence. La fonction $f : x \mapsto \sin^3 x/x^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, en 0, $f(x) \sim x$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin, en $+\infty$, $|f(x)| \leqslant 1/x^2$ où $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f l'est aussi. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calcul. On a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $a > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_a^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

À vrai dire, c'est ce découpage qui a motivé le passage à la limite ci-dessus, car si la borne du bas est 0, le découpage n'est pas possible. En posant $y = 3x$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\Big(\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \frac{3}{4}\int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or $\sin(x)/x^2 \sim_0 1/x$, donc c'est surement le terme prépondérant dans le calcul. Alors on écrit

$$\begin{aligned}\int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_a^{3a} \frac{x + \sin x - x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln 3 + \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Comme $(\sin x - x)/x^2 \sim_0 -x/6$, la fonction $x \mapsto (\sin x - x)/x^2$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Finalement

$$I = \lim_{a\to 0^+} \frac{3}{4}\Big(\ln 3 + \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2}\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{3}{4}\ln 3.$$

37 CCP

1. Étudions rapidement la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Si $x < 0$, $f'(x) < 0$ et si $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f décroit sur $\mathbb{R}_-^*$ puis croît sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, ce que l'on voulait.

En appliquant l'inégalité au réel $-x^2$, $e^{-x^2} \geqslant 1 - x^2$. En l'appliquant au réel x^2, $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$, donc $e^{-x^2} \leqslant 1/(1 + x^2)$.

2.a. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $e^{-x^2} \ll_{+\infty} e^{-x}$, où $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et I converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. I_n est l'intégrale sur un segment d'un polynôme donc elle converge.

Enfin, la fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$, $1/(1+x^2)^n \leqslant 1/(1+x^2)$, où $x \mapsto 1/(1 + x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme dérivée positive de la fonction Arctangente qui est majorée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $x \mapsto 1/(1 + x^2)^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et J_n converge.

2.b. D'après 1, en posant $u = \sqrt{n}\,t$,

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1 (1 - t^2)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}} = \frac{I}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

De même,

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^2)^n} \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{I}{\sqrt{n}}.$$

38 CCP

1. Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}t\,f(t) &= e^{\ln t}\exp\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t\,\frac{\sin t}{t}\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t\Big(1 + \frac{\sin t}{t}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Or $\ln t\left(1 + \dfrac{\sin t}{t}\right) \underset{t\to 0}{\sim} 2\ln t \underset{t\to 0}{\ll} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc

$$\lim_{t\to 0}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t\Big(1 + \frac{\sin t}{t}\Big)\Big) = +\infty$$

donc $\lim\limits_{t\to 0} t\,f(t) = +\infty$.

2. Cela signifie que $f(t) \gg_0 1/t$. Or la fonction $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ donc la fonction f non plus.