

# Quatrième feuille d'exercices

## SÉRIES ENTIÈRES

**39** ————— **CCP**

Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de  $\sum x^{3n}/(3n)!$

**40** ————— **AM**

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  où  $(\alpha, \beta, a_0) \in \mathbb{C}^3$ ,  $a_{2p} = \alpha a_{2p-1}$  si  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a_{2p+1} = \beta a_{2p}$  si  $p \in \mathbb{N}$ .

**41** ————— **MT**

Considérons la suite réelle définie par  $a_0 > 0$  et  $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

**42** ————— **CCP**

Déterminer le domaine de définition de la fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (nx)^n/n!$

**43** ————— **CCP**

Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de  $\sum \text{ch}(n)x^{3n+1}$ .

**44** ————— **CCP**

Considérons la suite  $(a_n)$  définie par  $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ . Donner le rayon de convergence et la somme de  $\sum a_n x^n/n!$

**45** ————— **CCP**

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n dx.$$

**46** ————— **CCP**

Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de  $\sum x^n/(1+2+\dots+n)$ .

**47** ————— **CCP**

Posons  $f(0) = \frac{1}{2}$  et si  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer qu'il en est de même de  $1/f$ .

**48** ————— **TPE**

On se donne une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et on note  $f$  sa somme.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $p \geq 1$ . On s'intéresse à la série  $\sum P(n) a_n x^n$  dont on note  $R'$  le rayon de convergence et  $g$  la somme.

1. Montrer que, pour  $n$  assez grand,  $|P(n)| \geq 1$ . Qu'en déduit-on pour  $R'$  ?

2. Montrer que la famille

$$(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-p+1))$$

est une base de  $\mathbb{R}_p[X]$ . En déduire que  $R' = R$  et exprimer  $g$  en fonction des dérivées de  $f$ .

3. Donner le rayon de convergence et calculer la somme de

$$\sum \frac{n^2 2^n + 2^n}{n!} x^n.$$

**49** ————— **CCP**

Considérons  $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$ , où  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Décomposer  $f(x)$  en éléments simples.

2. En déduire que  $f$  est développable en série entière. Préciser son développement en série entière et en déterminer le domaine de validité.

3. Donner le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en 0.

**50** ————— **CCP**

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  où

$$a_n = \int_0^1 \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$

**51** ————— **AM**

Déterminer le développement en série entière de

$$x \mapsto \text{ch } x \cos x.$$

**52** ————— **CS**

Déterminer le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}.$$

**53** ————— **ENS**

Déterminer le développement en série entière de

$$x \mapsto \ln^2(1+x).$$