Corrigés des exercices de la quatrième feuille

39 — **CCP**

Rayon de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/(3n)! \leqslant 1/n!$, donc le rayon de convergence cherché R est supérieur à celui de la série entière $\sum x^{3n}/n!$, lequel est $+\infty$ car on reconnait le développement en série entière de l'exponentielle évalué en x^3, qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $R = +\infty$.

Somme. Soit S la somme de la série entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\ S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &S''(x) + S'(x) + S(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \end{aligned}$$

En résolvant l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on trouve

$$S : x \mapsto \tfrac{1}{3}\, e^x + \tfrac{2}{3}\, e^{-x/2} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x).$$

40 — **AM**

Scindons la série entière en ses parties paire et impaire, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Comme $a_{2p+2} = \alpha\, a_{2p+1} = \alpha\, \beta\, a_{2p}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left| \frac{a_{2p+2}\, z^{2p+2}}{a_{2p}\, z^{2p}} \right| = |\alpha\, \beta|\, |z|^2$$

et $R_1 = 1/\sqrt{|\alpha\, \beta|}$. De même, $R_2 = 1/\sqrt{|\alpha\, \beta|}$. Comme la série du départ est la somme des deux, son rayon de convergence vérifie $R \geqslant R_1$. Mais $R_1 = R_2$, donc on ne peut conclure à l'égalité. Seulement, si $|z| > R_1$, $\sum a_{2p}\, z^{2p}$ diverge grossièrement, autrement dit la suite $(a_{2p}\, z^{2p})$ ne tend pas vers 0. Cette suite est extraite de la suite $(a_n\, z^n)$, qui ne tend donc pas vers 0 non plus. Alors, $R = R_1 = R_2 = 1/\sqrt{|\alpha\, \beta|}$.

41 — **MT**

Rayon de convergence. Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, de sorte que $a_{n+1} = f(a_n)$. Comme $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, la suite (a_n) est bien définie. De plus, pour $x > 0$, $f(x) < x$, donc $a_{n+1} < a_n$ et la suite (a_n) décroit. Comme elle est positive, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. Par continuité de f, à la limite on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell = 0$. Alors, on peut écrire $a_{n+1} = a_n + \mathrm{o}(a_n)$, ou encore $a_{n+1}/a_n = 1 + \mathrm{o}(1)$ donc $\lim |a_{n+1}/a_n| = 1$ et d'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.

Étude aux bords. Comme (a_n) tend vers 0 en décroissant, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n\, a_n$ converge.

De plus, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\, a_n^2 + \mathrm{o}(a_n^2)$ donc $\ln(a_{n+1}/a_n) \sim -\frac{1}{2}\, a_n$. Mais $\lim a_n = 0$ donc $\lim \ln(a_n) = -\infty$. Or la suite $(\ln(a_n))$ est de même nature que la série de terme général $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln(a_{n+1}/a_n)$, donc $\sum a_n$ diverge.

Ensemble de définition. Finalement, la somme est définie sur $[-1, 1[$.

42 — **CCP**

Rayon de convergence. Posons $a_n = n^n/n!$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la règle de d'Alembert, puisque

$$|a_{n+1}/a_n| = (1 + 1/n)^n \to e,$$

le rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$ est $R = 1/e$.

Étude aux bords. D'après la formule de Stirling,

$$a^n\, R^n = n^n\, e^{-n}/n! \sim 1/\sqrt{2\, \pi\, n}$$

donc la série $\sum a_n\ R^n$ diverge. En outre, $\ln(1 + 1/n) \leqslant 1/n$ donc $(1 + 1/n)^n \leqslant e$ et

$$\left| \frac{a_{n+1}\, R^{n+1}}{a_n\, R^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\, \frac{1}{e} \leqslant 1.$$

Alors la suite $(|a^n\, R^n|)$ décroit vers 0 et d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum a_n\, (-R)^n$ converge.

Ensemble de définition. Finalement, la somme est définie sur $[-R, R[$.

43 — **CCP**

Rayon de convergence. Utilisons la règle de d'Alembert. Comme deux termes sur trois sont nuls, elle s'utilise avec le x : pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\mathrm{ch}(n+1)\, x^{3n+4}}{\mathrm{ch}(n)\, x^{3n+1}} \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} e\, |x|^3\,.$$

Si $e\, |x|^3 < 1$, c'est-à-dire si $|x| < e^{-1/3}$, la série converge absolument.

Si $e\, |x|^3 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > e^{-1/3}$, la série diverge grossièrement.

Par définition du rayon de convergence, $R = e^{-1/3}$.

Somme. Soit $x \in \,]-R, R[$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n)\, x^{3n+1} &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2}\, x^{3n} \\ &= \frac{x}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e\, x^3)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-1}\, x^3)^n \right) \\ &= \frac{x}{2} \left(\frac{1}{1 + e\, x^3} + \frac{1}{1 + e^{-1}\, x^3} \right) \\ &= \frac{x\, (1 + \mathrm{ch}(1)\, x^3)}{1 + 2\, \mathrm{ch}(1)\, x^3 + x^6}. \end{aligned}$$

44 — **CCP**

Rayon de convergence. La suite (a_n) vérifie une récurrence double d'équation caractéristique $r^2 - 2\,r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Alors $a_n = \alpha + \beta\, n$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Sans difficulté, $a_n = a_0 + n\,(a_1 - a_0)$.

Si $a_0 = a_1 = 0$, $a_n = 0$. Il s'agit de la série nulle, dont le rayon de convergence est $+\infty$.

Supposons $(a_0, a_1) \neq (0, 0)$. Les a_n sont non nuls à partir d'un certain rang. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}/(n+1)!}{a_n/n!}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{(n+1)\,|a_n|} \to 0,$$

et d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence cherché vaut $+\infty$.

Somme. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\,x^n &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + (a_1 - a_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}\\ &= a_0\, e^x + (a_1 - a_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\\ &= (a_0 + (a_1 - a_0)\,x)\,e^x.\end{aligned}$$

45 — **CCP**

Grâce aux développements en série entière usuels,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \Big[-\ln(1-x)\Big]_0^{1/2}\\ &= -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n}.\end{aligned}$$

Où l'on retrouve l'égalité annoncée.

46 — **CCP**

Rayon de convergence. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$a_n = \frac{1}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{2}{n\,(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}.$$

Alors, $\sum a_n\, x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n/n^2$. Comme $1/n^2$ est une fraction rationnelle en n, cette dernière a même rayon de convergence que $\sum x^n$, c'est-à-dire 1. Ainsi, $\sum a_n\, x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Somme. Soit $x \in \left]-1, 1\right[$. On a

$$\begin{aligned}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\,(n+1)}\, x^n\\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) x^n\\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.\end{aligned}$$

La scission est permise car les deux nouvelles séries entières ont aussi pour rayon de convergence 1. On a bien-sûr $f(0) = 0$. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x) &= -2\ln(1-x) - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x\right)\\ &= 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x)\right).\end{aligned}$$

47 — **CCP**

1. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x\right) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

En outre, cette somme vaut $\frac{1}{2}$ en 0, donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors $1/f$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Prouvons-le, de deux façons différentes.

Étude directe. Le numérateur $N : x \mapsto e^x - 1 - x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $N'(x) = e^x - 1$ et $N''(x) = e^x$. Comme $N'' > 0$, N' croît strictement sur $\mathbb{R}$. Or $N'(0) = 0$, donc $N' < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $N' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc N décroit strictement sur $\mathbb{R}_-^*$ et croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $N(0) = 0$, N ne s'annule qu'en 0. Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Et puisque $f(0) = \frac{1}{2}$, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Convexité. L'exponentielle est convexe, donc son graphe est au dessus de sa tangente en 0, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$, l'inégalité étant stricte, sauf en 0. Donc pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 0$ et $f(0) > 0$, donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

48 — **TPE**

1. Comme $\deg(P) \geqslant 1$, $\lim_{+\infty} |P| = +\infty$, donc à partir d'un certain rang, $|P(n)| \geqslant 1$. Donc à partir de ce rang, $|P(n)\,a_n| \geqslant |a_n|$, donc $R' \leqslant R$.

2. La famille donnée est échelonnée donc libre. Elle contient $p+1$ vecteurs : c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Il s'ensuit que P se décompose dans cette base, sous la forme

$$P = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \prod_{j=0}^{k-1} (X - j),$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \prod_{j=0}^{k-1} (n - j).$$

Nous savons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que ses dérivées s'écrivent, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\,]-R,R[$,

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)a_n x^{n-k}.$$

En particulier, les séries entières

$$\sum_{n\geqslant k}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)a_n\,x^{n-k}$$

ont toutes pour rayon de convergence R. Donc, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P(n)\,a_n=\alpha_0\,a_n+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)a_n,$$

$\sum P(n)a_n\,x^n$ est somme de p séries entières de rayon de convergence R, donc $R'\geqslant R$.

Enfin, pour tout $x\in\,]-R,R[$,

$$\begin{aligned}g(x)&=\alpha_0\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)a_n\,x^n\\&=\alpha_0\,f(x)+\sum_{k=1}^{p}\left(\alpha_k\,x^k\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)a_n\,x^{n-k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\,x^k\,f^{(k)}(x).\end{aligned}$$

3. En écrivant

$$\frac{n^2\,2^n+2^n}{n!}=(n^2+1)\,\frac{2^n}{n!},$$

le rayon de convergence cherché est celui de $\sum\frac{2^n}{n!}\,x^n$, qui est $+\infty$, grâce à une application rapide de la règle de d'Alembert.

D'une part, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,x)^n}{n!}=e^{2x}.$$

D'autre part, $X^2+1=X\,(X-1)+X+1$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}g(x)&=x^2\,f''(x)+x\,f'(x)+f(x)\\&=(4\,x^2+2\,x+1)\,e^{2x}.\end{aligned}$$

49 — **CCP**

1. Sans difficulté,

$$f(x)=\frac{3\,(x+1)+4}{(x+1)^2}=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}.$$

2. La fonction $g:x\mapsto 1/(x+1)$ est développable en série entière comme exemple fondamental du cours, et la fonction $h:x\mapsto 1/(x+1)^2$ l'est car $h=-g'$. Alors $f=3\,g-4\,h$ l'est comme combinaison linéaire de ces deux fonctions.

Toujours d'après le cours, en notant R_f, R_g et R_h les rayons de convergence des développements en série entière de f, g et h, $R_g=R_h=1$ donc $R_f\geqslant\min\{R_g,R_h\}=1$. Ainsi, pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$\begin{aligned}f(x)&=3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^n-4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,n\,x^{n-1}\\&=3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^n-4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,(n+1)\,x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,(4\,n+7)\,x^n.\end{aligned}$$

En outre, si $|x|=1$,

$$|(-1)^n\,(4\,n+7)\,x^n|=4\,n+7\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

donc dans ce cas, le développement en série entière de f diverge grossièrement et $R_f\leqslant 1$.

Finalement, $R_f=1$ et $D=\,]-1,1[$.

3. Toujours d'après le cours, le développement limité de f en 0 s'obtient en tronquant son développement en série entière : pour x proche de 0,

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\,(4\,n+7)\,x^n+\mathrm{o}(x^3)\\&=7-11\,x+15\,x^2-19\,x^3+\mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

50 — **CCP**

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[0,1]$, $0\leqslant t^2\leqslant 1$, donc

$$t^2\leqslant\frac{1+t^2}{2}\leqslant 1$$

d'où $$\frac{1}{2\,n+1}=\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t\leqslant a_n\leqslant\int_0^1 1\,\mathrm{d}t=1,$$

c'est-à-dire $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$, en posant $b_n=1/(2\,n+1)$ et $c_n=1$. Alors, avec des notations évidentes, $R_b\geqslant R_a\geqslant R_c$. Or d'après le cours, $R_c=1$ et puisque b_n est une fraction rationnelle en n, $R_b=R_c=1$. Donc $R_a=1$.

51 — **AM**

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\operatorname{ch}x\cos x=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}(i\,x)\\&=\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}((1+i)\,x)+\operatorname{ch}((1-i)\,x)\right)\\&=\operatorname{Re}(\operatorname{ch}((1+i)\,x))=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^{2n}\,x^{2n}}{(2\,n)!}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\,i)^n\,x^{2n}}{(2\,n)!}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p\,4^p\,x^{4p}}{(4\,p)!}.\end{aligned}$$

Commentaire. On aurait aussi pu tout écrire avec des exponentielles, ou dériver la fonction quatre fois, ou même effectuer un produit de Cauchy.

52 — CS

Définition. Comme $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^2+t^4)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(t) \sim_{-\infty} 1/t^4$, elle est intégrable sur $]-\infty, x]$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f' = \varphi$.

Développement en série entière. Développons f' en série entière. On peut constater que $f'(x) = g(x^2)$ où $g : x \mapsto 1/(1+x+x^2)$. Il suffit alors de développer g. Voici trois méthodes différentes.

Première méthode. On voit que si $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}.$$

Alors $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n}$

avec $a_{3p} = 1$, $a_{3p+1} = -1$ et $a_{3p+2} = 0$. Le rayon de convergence de cette série vaut bien-sûr 1.

Deuxième méthode. Cherchons un développement de la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, dont le rayon est R. Alors, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} 1 &= (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}\, x^n \\ &= a_0 + (a_1+a_0)\, x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2})\, x^n, \end{aligned}$$

en effectuant des décalages convenables des indices. Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto 1$, on a donc $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$. On voit alors que la suite définie par $a_{3p} = 1$, $a_{3p+1} = -1$ et $a_{3p+2} = 0$ est la seule solution. On retrouve les coefficients précédents.

Troisième méthode. On décompose la fraction en éléments simples sur $\mathbb{C}$, on développe chaque élément simple en série entière et on recompose le tout. Cette méthode est laissée en exercice.

Avec les coefficients définis ci-dessus, pour tout $x \in]-1,1[$, sachant que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n}$,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le rayon de cette série entière est bien-sûr 1.

53 — ENS

La fonction $f : x \mapsto \ln^2(1+x)$ est développable en série entière comme produit de fonctions qui le sont. Voici deux méthodes pour trouver son développement en série entière.

Première méthode. Faisons le produit de Cauchy du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ avec lui-même. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n.$$

Alors, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln^2(1+x) = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\, x^n$$

avec

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k} \\ &= \frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = 2\,\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

D'après le produit de Cauchy, le rayon de convergence R de $\sum b_n\, x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Mais $|b_n| \gg 1/n$ car $\sum 1/k$ diverge, donc $\sum b_n$ ne converge pas absolument et $R \leqslant 1$. Alors, $R = 1$.

Deuxième méthode. Cherchons une équation différentielle dont f soit solution et trouvons les solutions développables en série entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2\,\frac{\ln(1+x)}{1+x},\quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^2} - 2\,\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

Alors f' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+x)\, y' + y = \frac{2}{1+x}.$$

Posons $f'(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$ et

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n.$$

En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &\quad = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n \\ &\iff a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,(a_{n+1} + a_n)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto 1/(1+x)$, on a $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)\,(a_{n+1} + a_n) = (-1)^n$. Par une récurrence immédiate, $a_n = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} 1/k$. Pour finir, f est la primitive de f' nulle en 0, donc

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, \frac{x^{n+1}}{n+1} = 2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) x^n.$$

Commentaire. Il arrive que l'on trouve des résultats différents selon le procédé de calcul, ce qui permet d'obtenir des identités remarquables.