# Corrigés des exercices de la cinquième feuille

**54** — **EIVP17**

**1.** Posons $I=[0,\pi]$, $A=\mathbb{R}$ et

$$g : A\times I\to\mathbb{R},\ (x,t)\mapsto\cos(x\sin(t)),$$

de sorte que $f$ est la fonction

$$f : A\to\mathbb{R},\ x\mapsto\int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$ et

$$\forall(x,t)\in A\times I,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\sin(t)\sin(x\sin(t)),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=-\sin^2(t)\cos(x\sin(t)).$$

∘ Encore par opérations usuelles, pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $I$, donc elles y sont intégrables car $I$ est un *segment*.

∘ Toujours par opérations usuelles, pour tout $x\in A$, $t\mapsto\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $I$.

∘ Enfin, on a la domination suivante :

$$\forall(x,t)\in A\times I,\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant 1,$$

où $t\mapsto 1$ est continue donc intégrable sur le segment $I$.

Alors d'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales dépendant d'un paramètre,

- pour tout $x\in A$, $t\mapsto\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur $I$ (ce qui était évident puisque $I$ est un segment) ;
- $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$ ;
- et pour tout $x\in A$,

$$f'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$f''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

**2.** Pour tout $x\in A$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\pi f'(x)&=\Big[\cos(t)\sin(x\sin(t))\Big]_0^\pi\\&\quad-\int_0^\pi x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\\&=-x\int_0^\pi(1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\\&=-x\pi\,(f(x)+f''(x)),\end{aligned}$$

et $f$ est solution de l'équation différentielle proposée.

**55** — **MP**

Existence. Posons $A=\mathbb{R}$, $I=\mathbb{R}_+^*$ et

$$g : A\times I\to\mathbb{R},\ (x,t)\mapsto\frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}.$$

Pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $I$, par opérations usuelles. Soit $x\in A$. On a $|g(x,t)|\underset{t\to+\infty}{\ll}\dfrac{1}{t^2}$ et $g(x,t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$. L'équivalent est valide même si $x=0$, car $t\mapsto g(0,t)$ est la fonction nulle. Donc $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et elle est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0,1]$. Finalement, pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $I$ donc $f$ est définie sur $A$.

Calcul. L'idée est de dériver $f$ deux fois pour faire disparaitre le $t^2$ du dénominateur.

Montrons que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par opérations usuelles, pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$. En particulier, pour tout $(x,t)\in A\times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{\sin(xt)}{t}\,e^{-t},\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=\cos(xt)\,e^{-t}.$$

Pour tout $x\in A$, on a déjà dit que $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $I$ ; et bien-sûr, $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues (par morceaux) sur $I$. On a déjà vu aussi que pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $I$. Soit $x\in A$. Pour tout $t\in I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant|x|\,e^{-t},$$

où $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $I$ donc $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est aussi intégrable sur $I$.

*Commentaire.* Ici, la majoration est valide sur $I$ tout entier, donc il n'est pas nécessaire de couper l'intervalle en deux pour l'intégrabilité.

Enfin, pour tout $(x,t)\in A\times I$,

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant e^{-t}$$

donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ vérifie bien l'hypothèse de domination.

Il s'ensuit que pour tout $x\in A$, $t\mapsto\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur $I$, que $f$ est bien $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in A$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t,\\f''(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\cos(xt)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Comme $f'(0) = 0$, $f'(x) = \operatorname{Arctan} x$. Alors, comme $f(0) = 0$ et en intégrant par parties,

$$f(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

**56** — CS

**1.** Tout d'abord, pour tout $x > 0$ et $t \geqslant 0$, $\left|\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\right| \leqslant e^{-xt}$ où $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $x > 0$. Donc $F$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$.

En outre, si $0 < x < y$, par croissance de l'exponentielle, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} > \dfrac{e^{-yt}}{\sqrt{1+t^2}}$, et par croissance de l'intégrale, $F(x) > F(y)$. Ainsi, $F$ décroit strictement sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est donc inutile (et long !) de dériver $F$.

**2.** Voici deux preuves.

Preuve directe. On voit que pour tout $x > 0$,

$$F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

donc $F$ tend vers 0 en $+\infty$.

Preuve savante. Utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

D'une part, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

D'autre part, puisque $x$ tend vers $+\infty$, on peut se restreindre à $x \geqslant 1$. Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \geqslant 1$,

$$\left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\right| \leqslant e^{-t},$$

où $t \mapsto e^{-t}$ constitue une domination valable.

Alors, le théorème s'applique et l'on peut permuter la limite et l'intégrale :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

**3.** Pour des raisons très analogues, $G$ est définie sur $\mathbb{R}$. On voit que pour $x$ réel, $G(x) = H(x^2)$ où

$$H : u \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+u\,t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Si l'on montre que $H$ est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0, on pourra écrire $H(u) = a + b\,u + \mathrm{o}(u)$, donc $G(x) = a + b\,x^2 + \mathrm{o}(x^2)$. Mais comme $G$ est (clairement) paire, on aura $G(x) = a + b\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

Montrons que $H$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Il faut déjà qu'elle soit définie, donc il faut que $1 + u\,t^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $u \geqslant 0$. Posons $A = I = \mathbb{R}_+$ et

$$h : A \times I \to \mathbb{R},\ (u,t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+u\,t^2}}.$$

Pour tout $u \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $I$ et pour tout $t \in I$, $|h(u,t)| \leqslant e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $I$ donc $t \mapsto h(x,t)$ l'est aussi. Pour tout $t \in I$, $u \mapsto h(u,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ et pour tout $(u,t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,t) = \frac{-t^2\,e^{-t}}{2\,(1+u\,t^2)^{3/2}}.$$

Bien-sûr, pour tout $u \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,t)$ est continue (par morceaux) sur $I$. Enfin, pour tout $(u,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial u}(u,t)\right| \leqslant t^2\,e^{-t}$$

où $t \mapsto t^2\,e^{-t}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $I$, et $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ vérifie l'hypothèse de domination. Alors $H$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ et pour tout $u \geqslant 0$,

$$H'(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial u}(u,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2\,e^{-t}}{2\,(1+u\,t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Alors pour $u \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} H(u) &= H(0) + u\,H'(0) + \mathrm{o}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t - u\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\,t^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(u) \\ &= 1 - u + \mathrm{o}(u). \end{aligned}$$

Ainsi, quand $x$ est proche de 0,

$$G(x) = 1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

*Commentaire.* C'est plus facile que de dériver $G$ trois fois.

Soit $x > 0$. Dans $F(x)$, en posant $v = x\,t$, qui est un changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, on a

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{1+(\frac{v}{x})^2}}\,\frac{\mathrm{d}v}{x} = \frac{1}{x}\,G\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Si $x$ tend vers $+\infty$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}\Big(1 - \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{x^4}\Big). \end{aligned}$$

*Commentaire.* Où l'on retrouve la limite de la question 2.

**57** — CS

Existence. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$$h : t \mapsto \frac{e^{-t\,(1+ix)}}{\sqrt{t}}$$

est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$|h(t)| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}},$$

où $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$. Enfin,

$$|h(t)| \underset{+\infty}{\ll} e^{-t},$$

où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Alors, $h$ est intégrable sur $I$ et $f$ est définie sur $A = \mathbb{R}$.

Calcul. L'idée est de trouver une équation différentielle dont $f$ est solution.

Prouvons que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$. Par opérations usuelles pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $I$ (on le savait déjà car on reconnait $h$) ; pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ et pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -i\sqrt{t}\,e^{-t(1+ix)}\,;$$

et pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $I$.

Enfin, pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\,e^{-t} = \varphi(t).$$

La fonction $\varphi$ est continue sur $I$, elle se prolonge évidemment par continuité en 0, et pour $t \in I$, $\varphi(t) \ll_{+\infty} e^{-t/2}$, donc elle est intégrable sur $I$. Ainsi, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

Alors, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $I$ ; $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ et pour tout $x \in A$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\,e^{-t(1+ix)}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons une intégration par parties sur $f'$. Elle est licite car tous les termes manipulés ont un sens. Pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[i\sqrt{t}\,\frac{e^{-t(1+ix)}}{(1+ix)}\right]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{i}{2\sqrt{t}}\,\frac{e^{-t(1+ix)}}{(1+ix)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-i}{2\,(1+ix)}\,f(x), \end{aligned}$$

donc $f$ est solution sur $A$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{-i}{2\,(1+ix)}\,y = \frac{-(i+x)}{2\,(1+x^2)}y.$$

Alors pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)\exp\left(\int \frac{-(i+x)}{2\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= f(0)\exp(-\tfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x - \tfrac{1}{4}\ln(1+x^2)) \\ &= f(0)\,(1+x^2)^{-1/4}\exp(-\tfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x). \end{aligned}$$

En outre,

$$f(0) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Finalement,

$$f : x \mapsto \sqrt{\pi}\,(1+x^2)^{-1/4}\exp(-\tfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x).$$

*Commentaire.* La valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$ n'est pas à connaitre. De plus, on peut exprimer l'exponentielle à l'aide de radicaux grâce à la trigonométrie : à vous de jouer…

**58** — CS

**1.** Au vu de la deuxième question, montrons directement que $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A = \mathbb{R}_+^*$. Posons aussi $I = \mathbb{R}_+$ et

$$h : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $I$ ; pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$ ; pour tout $x \in A$, les fonctions

$$\begin{aligned} t &\mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2} \\ \text{et } t &\mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2} \end{aligned}$$

sont continues (par morceaux) sur $I$.

∘ Pour tout $x \in A$ et tout $t \in I$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, $\dfrac{t}{1+t^2} \leqslant t \leqslant 1$ si $t \leqslant 1$ et $\dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2} \leqslant 1$ si $t > 1$, donc $|h(x,t)| \leqslant e^{-xt}$ et $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-xt}$, où la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $I$ car $x > 0$, donc $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur $I$.

∘ Étant donné un segment $[a,b] \subset A$, avec $0 < a \leqslant b$, pour tout $x \in [a,b]$ et $t \in I$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}$, où $t \mapsto e^{-at}$ ne dépend pas de $x$, est continue (par morceaux) et intégrable sur $I$ car $a > 0$, donc $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ vérifie l'hypothèse de domination locale.

Il s'ensuit que

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur $I$ ;
- la fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$ ;
- pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \\ g''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

**2.** Sans difficulté, pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} g''(x) + g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

**3.** Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente, on se doute que celle qui définit $f$ l'est aussi. Donc les théorèmes du cours ne s'appliquent pas. On peut contourner la difficulté en intégrant par parties, ce qui créera une intégrale à paramètre absolument convergente à laquelle on pourra appliquer le cours.

Tentons plutôt un changement de variable. Soit $x \in A$. Le changement $u = t + x$ est licite car il est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $I$ dans $[x, +\infty[$. Alors, l'intégrale $f(x)$ est de même nature que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u - x)}{u} \, \mathrm{d}u.$$

Si c'est permis, cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} &\frac{\sin u \cos x - \sin x \cos u}{u} \, \mathrm{d}u \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \, \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Mais d'après le cours, ces deux intégrales sont semi-convergentes car $x > 0$, donc la précédente l'est par somme, donc l'intégrale $f(x)$ converge et $f$ est définie sur $A$.

En outre, choisissons un réel $a > 0$. Pour tout $x \in A$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u = \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u - \int_a^{x} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u,$$

ce qui est permis puisque $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u$ converge. Or la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ et $a \in A$, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u$ est son unique primitive qui s'annule en $a$. En passant, elle est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$. Alors, la fonction

$$S : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$ et l'on a

$$S' : x \mapsto -\frac{\sin x}{x} \text{ et } S'' : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

Pour les mêmes raisons, la fonction

$$C : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \, \mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$ et l'on a

$$C' : x \mapsto -\frac{\cos x}{x} \text{ et } C'' : x \mapsto \frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}.$$

Il s'ensuit que $f = S \cos - C \sin$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A$. De plus, pour $x \in A$,

$$\begin{aligned}f''(x) &= S''(x) \cos x + 2 S'(x) \cos' x + S(x) \cos'' x \\ &\quad - C''(x) \sin x - 2 C'(x) \sin' x - C(x) \sin'' x \\ &= \frac{\sin x \cos x}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{x} + 2 \frac{\sin^2 x}{x} \\ &\quad - S(x) \cos x - \frac{\cos x \sin x}{x^2} - \frac{\sin^2 x}{x} \\ &\quad + 2 \frac{\cos^2 x}{x} + C(x) \sin x \\ &= \frac{1}{x} - f(x),\end{aligned}$$

où l'on voit que $f$ vérifie la même équation différentielle que $g$.

**4.** Clairement, pour tout $x \in A$,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

donc $\lim_{+\infty} g = 0$.

En outre, on voit que $\lim_{+\infty} S = \lim_{+\infty} C = 0$, car $S(x)$ et $C(x)$ sont les restes d'intégrales convergentes. Comme sin et cos sont bornées, il s'ensuit que $\lim_{+\infty} f = 0$.

**5.** Comme $f$ et $g$ sont solutions sur $A$ de la même équation différentielle, $f - g$ est solution sur $A$ de l'équation homogène $y'' + y = 0$, donc il existe deux constantes $\alpha$ et $\beta$ telles que $f - g = \alpha \cos + \beta \sin$. Or $\lim_{+\infty}(f - g) = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ et $f = g$.

Constatons que $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in I$, en reprenant les notations de la question 1, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, où $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc constitue une domination valide de $h$.

Bien-sûr, $f(0)$ a un sens. Pour étudier la continuité de $f$ en 0, intégrons par parties comme dans le cours, en choisissant $t \mapsto 1 - \cos t$ comme primitive de sin. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \left[\frac{1 - \cos t}{t + x}\right]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(t+x)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(t+x)^2} \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Vérifions la domination, le reste ne posant pas de difficulté. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{1 - \cos t}{(t+x)^2}\right| \leqslant \frac{1 - \cos t}{t^2}.$$

Or $\left|\dfrac{1 - \cos t}{t^2}\right| \sim_0 \dfrac{1}{2}$ et $\left|\dfrac{1 - \cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, donc $t \mapsto \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$ est une domination valide. Alors $f$ est continue en 0.

Finalement, comme $f = g$ sur $A$ et qu'elles sont continues en 0,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = f(0) = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$