Sixième feuille d'exercices

Équations différentielles linéaires

59

Résoudre $x^2 y' + y = 1$.

60 — CCP

1. Trouver les réels a, β, γ tels que

$$\frac{1}{t\,(t^2-1)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t+1} + \frac{\gamma}{t-1}.$$

2. Résoudre $t\,(t^2-1)\,x' + 2\,x = t^2$.

61 — CCP

Résoudre l'équation différentielle

$$2\,x\,(x+1)\,y' + (3\,x+4)\,y = 2\,x\sqrt{x+1}.$$

62

Résoudre $y'' + 6\,y' + 9\,y = e^{-3x}$.

63 — AM

Résoudre $y'' + 2\,y' + y = x \operatorname{sh} x$.

64 — CCP

Sur $]1,+\infty[$, résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = \frac{x}{(x-1)^2}\,e^{-2x}.$$

65 — MP

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

66 — MP

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$(E) \qquad y'' + \omega^2\,y = f.$$

Montrer que la fonction

$$\psi : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin(\omega\,(x-t))\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+$.

67 — ENSEA

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad x\,y'' + y' + y = 0.$$

1. Déterminer une solution f développable en série entière de rayon R non nul et telle que $f(0) = 1$.

2. Montrer que f s'annule sur $]0,2[$.

68 — MP

Déterminer le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \sin\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Arcsin} x\right).$$

69 — AM

1. Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle $4\,x\,y'' + 2\,y' - y = 0$.

2. La résoudre complètement.

70 — WP

1. Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2\,x^{2n+1}}{(2\,n+1)!}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.