Corrigés des exercices de la sixième feuille

59

PRÉSENTATION. Nommons (E) cette équation. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Mais 0 est une singularité de (E) donc on résout sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGENÈ. Pour $k \in \{1, 2\}$, l'ensemble des solutions sur I_k de l'équation homogène associée est

$$\left\{ x \mapsto \alpha_k \exp\left(-\int \frac{dx}{x^2}\right) = \alpha_k e^{-1/x}, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

RÉSOLUTION COMPLÈTE. D'autre part, on voit que $x \mapsto 1$ est solution évidente de (E) , donc l'ensemble des solutions sur I_k de (E) est

$$\{x \mapsto 1 + \alpha_k e^{-1/x}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

60

CCP

1. Avec la méthode habituelle, on trouve

$$\frac{1}{t(t^2 - 1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)}.$$

2. Nommons (E) cette équation. Les fonctions $t \mapsto t(t^2 - 1)$, $t \mapsto 2$ et $t \mapsto t^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Mais -1 , 0 et 1 sont les singularités de (E) donc on résout sur $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$. Sur l'intervalle I_k , pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{ t \mapsto \alpha_k \exp\left(-\int \frac{2dt}{t(t^2 - 1)}\right) = \frac{\alpha_k t^2}{t^2 - 1}, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aucune solution particulière ne saute aux yeux : appliquons la méthode de variation de la constante. Posons

$$x(t) = \frac{\alpha_k(t) t^2}{t^2 - 1},$$

où α_k est dérivable sur I_k . On a donc

$$t(t^2 - 1) \frac{\alpha_k'(t) t^2}{t^2 - 1} = t^2,$$

d'où l'on choisit $\alpha_k(t) = \ln |t|$. Finalement, l'ensemble des solutions sur I_k de l'équation (E) est

$$\left\{ t \mapsto \frac{(\alpha_k + \ln |t|) t^2}{t^2 - 1}, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

61

CCP

PRÉSENTATION. Les fonctions $x \mapsto 2x(x+1)$ et $x \mapsto 3x+4$ sont continues sur $\mathbb{R}$, mais la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ n'est définie et continue que sur $[-1, +\infty[$. En outre, les singularités de (E) sont 0 et -1 donc on étudie l'équation (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ ou $I_2 =]0, +\infty[$.

ÉQUATION HOMOGENÈ. Sur I_k , pour $k \in \{1, 2\}$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{ x \mapsto \alpha_k \exp\left(-\int \frac{3x+4}{2x(x+1)} dx\right) = \alpha_k \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

VARIATION DE LA CONSTANTE. Considérons

$$\varphi : x \mapsto \sqrt{x+1}/x^2.$$

Sur I_k , on cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \alpha_k \varphi$, où α_k est une fonction dérivable sur I_k . En reportant dans (E) , on trouve

$$\begin{aligned} 2x(x+1)\alpha_k'(x)\varphi(x) &= 2x\sqrt{x+1} \\ \iff \alpha_k'(x) &= x^2/(x+1) \\ \iff \alpha_k(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) + \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\left\{ x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) + \beta_k\right) \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

62

ÉQUATION HOMOGENÈ. L'équation caractéristique est $(C) r^2 + 6r + 9 = 0$, dont -3 est racine double. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée est donc

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{-3x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Comme le coefficient, -3 , de l'exposant de l'exponentielle du second membre est racine double de (C) , on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Q(x)e^x$ où $\deg Q = 2$, et l'on trouve $Q(x) = \frac{1}{2}x^2$, par exemple.

CONCLUSION. L'ensemble des solutions de l'équation complète est donc

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{-3x} + (\alpha x + \beta) e^{-3x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

63

AM

ÉQUATION HOMOGENÈ. L'équation caractéristique est $(C) r^2 + 2r + 1 = 0$, dont -1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{-x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{2}x e^{-x}$. Donc grâce au théorème de superposition, cherchons séparément une solution particulière des deux équations

$$(E_1) \quad y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}x e^x,$$

$$(E_2) \quad y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}x e^{-x}.$$

Comme 1 n'est pas racine de (C), on cherche une solution particulière de (E₁) sous la forme $\psi_1(x) = (ax + b)e^x$, et on trouve $\psi_1(x) = \frac{1}{8}(x - 1)e^x$.

En revanche, -1 est racine double de (C), donc on cherche une solution particulière de (E₂) sous la forme $\psi_2(x) = Q(x)e^{-x}$ où $\deg Q = 3$, et l'on trouve $Q(x) = -\frac{1}{12}x^3$, par exemple.

Une solution particulière de (E) est $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

CONCLUSION. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{8}(x - 1)e^x - \frac{1}{12}x^3e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{-x}, \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

64 ————— CCP

PRÉSENTATION. Nommons (E) cette équation. Sur $I =]1, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto 4$ et $x \mapsto xe^{-2x}/(x - 1)^2$ sont continues.

ÉQUATION HOMOGENÈNE. L'équation caractéristique est (C) $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui admet -2 comme racine double. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est donc

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-2x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Utilisons la méthode de variation de la constante. Puisque $x \mapsto e^{-2x}$ est une solution sur I de (H) qui ne s'annule jamais, cherchons une solution particulière sur I de (E) sous la forme $y : x \mapsto \alpha(x)e^{-2x}$ où α est une fonction deux fois dérivable. En reportant dans (E), on obtient

$$\alpha''(x) = \frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 + 1}{(x - 1)^2} \\ = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Comme on cherche une solution particulière de (E), intégrons en choisissant arbitrairement des constantes d'intégration nulles :

$$\alpha'(x) = \ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1}, \\ \alpha(x) = (x - 1)\ln(x - 1) - (x - 1) - \ln(x - 1) \\ = (x - 2)\ln(x - 1) - x + 1.$$

Donc une solution particulière sur I de (E) est

$$x \mapsto (x - 2)\ln(x - 1)e^{-2x} + (-x + 1)e^{-2x}.$$

Et comme $x \mapsto (-x + 1)e^{-2x}$ est solution sur I de (H), $x \mapsto (x - 2)\ln(x - 1)e^{-2x}$ est aussi une solution particulière sur I de (E).

CONCLUSION. Ainsi, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\left\{ x \mapsto (x - 2)\ln(x - 1)e^{-2x} + (\alpha x + \beta)e^{-2x}, \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

65 ————— MP

Soit f une solution. Alors, f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable, et par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$.

En dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(-x) = e^x$. Comme $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$, il s'ensuit que $f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x} = 2 \operatorname{ch} x$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{ch} x + \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

En reportant dans l'équation du départ,

$$f'(x) + f(-x) = e^x + (\alpha + \beta)(\cos x - \sin x).$$

Donc on doit avoir $\alpha + \beta = 0$. Finalement, l'ensemble des solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ est

$$\{f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \alpha(\cos x - \sin x), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Commentaire. On aurait également pu résoudre en décomposant f en somme de ses parties paire et impaire. Mais c'est plus long.

66 ————— MP

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme il est à la fois dans l'intégrale et sur ses bornes, transformons l'écriture :

$$\psi(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x (\sin(\omega x) \cos(\omega t) \\ - \cos(\omega x) \sin(\omega t)) f(t) dt \\ = \frac{\sin(\omega x)}{\omega} \int_0^x f(t) \cos(\omega t) dt \\ - \frac{\cos(\omega x)}{\omega} \int_0^x f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Les fonctions $c : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $s : x \mapsto \sin(\omega x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction cf est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction

$$C : x \mapsto \frac{1}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t) f(t) dt = \int_0^x \frac{c(t) f(t)}{\omega} dt$$

est la primitive de $\frac{1}{\omega} cf$ nulle en 0, et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{\omega} \int_0^x s(t) f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\psi = sC - cS$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi' = \omega cC + \frac{1}{\omega} scf + \omega sS - \frac{1}{\omega} csf = \omega(cC + sS).$$

On voit que ψ' est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi'' = -\omega^2 sC + c^2 f + \omega^2 cS + s^2 f = -\omega^2 \psi + f.$$

La fonction ψ est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

Alors, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\{\psi + \alpha c + \beta s, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

67 ————— ENSEA

1. Supposons que l'équation (E) admette une solution y développable en série entière de rayon de convergence R non nul. Alors, pour tout x de $] -R, R[$,

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\text{et } y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}.$$

En reportant dans l'équation (E), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ & + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}.$$

Par une récurrence immédiate, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = +\infty$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.$$

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, c'est

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

2. On sait que $f(0) = 1$. De plus, comme somme d'une série entière, f est continue sur $]0, 2[$, donc si $f(2) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assurera l'existence d'une racine de f sur $]0, 2[$.

On voit que $f(2)$ est la somme d'une série alternée. Mais la suite $(2^n/(n!)^2)$ ne décroît qu'à partir du rang 2, donc les conclusions du critère spécial des séries alternées ne sont valides qu'à partir du rang 2. En particulier, $R_2 = f(2) - S_2$ est du signe de son premier terme, c'est-à-dire négatif. Or

$$S_2 = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \frac{2^n}{(n!)^2} = 0.$$

Ainsi, $f(2) = R_2 < 0$, ce que l'on voulait.

68 ————— MP

L'idée est de trouver une équation différentielle dont f est solution, et d'en chercher les solutions développement en série entière.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$ et, par opérations usuelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$. Pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\cos(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsin} x)}{3\sqrt{1-x^2}},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x \cos(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsin} x)}{3(1-x^2)^{3/2}} - \frac{\sin(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsin} x)}{9(1-x^2)} \\ &= \frac{x f'(x)}{1-x^2} - \frac{f(x)}{9(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est l'unique solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle

$$(H) \quad (1-x^2)y'' - xy' + \frac{1}{9}y = 0$$

telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.

SOLUTION DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Comme f est impaire, supposons que l'on puisse écrire, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1},$$

avec $a_0 = \frac{1}{3}$. Pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)(2n) a_n x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)(2n+2) a_{n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Alors, en reportant dans (H), pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} & f''(x) - x^2 f''(x) - x f'(x) + \frac{1}{9} f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)(2n+2) a_{n+1} x^{2n+1} \\ & - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)(2n) a_n x^{2n-1} \\ & - x \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} \\ & + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)(2n+2) a_{n+1} x^{2n+1} \\ & - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)(2n) a_n x^{2n+1} \\ & - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+1} \\ & + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n+3)(2n+2)a_{n+1} - ((2n+1)^2 - \frac{1}{9})a_n] x^{2n+1} = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+3)(2n+2)a_{n+1} - ((2n+1)^2 - \frac{1}{9})a_n = 0,$$

$$\text{d'où } a_{n+1} = \frac{(2n + \frac{4}{3})(2n + \frac{2}{3})}{(2n+3)(2n+2)} a_n$$

$$\text{et } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(3n+2)(3n+1)}{9(2n+3)(2n+2)}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_0} &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4(3k+2)(3k+1)}{9(2k+3)(2k+2)} \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (3k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (3k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+3) \prod_{k=0}^{n-1} (2k+2)} \\ &= \frac{2^{2n} \prod_{k=0}^{n-1} (3k+2) \prod_{k=0}^{n-1} (3k+1)}{3^{2n} \prod_{k=1}^n (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k)} \frac{\prod_{k=1}^n (3k)}{\prod_{k=1}^n (3k)} \\ &= \frac{2^{2n} (3n)!}{3^{2n} (2n+1)! 3^n n!} \end{aligned}$$

d'où, puisque $a_0 = \frac{1}{3}$,

$$a_n = \frac{2^{2n} (3n)!}{3^{3n+1} n! (2n+1)!}.$$

Constatons que cette expression est encore valable pour $n = 0$.

Synthèse. D'après le calcul précédent,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(3n+2)(3n+1)}{9(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc d'après le règle de d'Alembert, la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc la série entière $\sum a_n x^{2n+1}$ a pour rayon de convergence $\sqrt{1} = 1$. Cela valide la synthèse.

Conclusion. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} (3n)!}{3^{3n+1} n! (2n+1)!} x^{2n+1}.$$

69 AM

Notons (E) l'équation différentielle.

1. ANALYSE. Supposons que l'on puisse écrire

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec un rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} 4xy'' + 2y' - y &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1} \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 4(n+1)n a_{n+1} x^n \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n) x^n = 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, pour tout $n \geq 0$,

$$2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)(2n+1)}$$

ou encore, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)} = \dots = \frac{a_0}{(2n)!},$$

ce que l'on prouve par une récurrence immédiate, et le résultat est encore valide pour $n = 0$.

SYNTHÈSE. Posons $a_n = 1/(2n)!$ pour tout $n \geq 0$. On voit que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R = +\infty$. Ainsi, la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) . De plus, l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est la droite $\mathbb{R}\varphi$. Pour finir, si $x \geq 0$, $x = (\sqrt{x})^2$ donc

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(\sqrt{x})$$

et si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x})^2$ donc

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{-x}.$$

Ainsi, φ est la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \text{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0, \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Comme 0 est singularité de (E) , terminons la résolution sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_+^*$. Par analogie avec la fonction φ , introduisons la fonction

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \text{sh}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0, \\ \sin(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Constatons qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue mais pas dérivable en 0. Un calcul sans difficulté prouve que ψ est solution sur I de (E) . Comme ψ n'est pas dérivable en 0, elle n'est pas liée à φ . Mais on sait que l'ensemble des solutions de (E) sur I est un plan vectoriel, donc c'est $\text{Vect}(\varphi, \psi)$.

70 ————— **WP**

1. Il s'agit d'une série entière lacunaire, donc on applique la règle de d'Alembert avec le x . Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{((n+1)!)^2 x^{2n+3}}{(2n+3)!} \bigg/ \frac{(n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| = \frac{(n+1)x^2}{2(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4}.$$

Si $x^2/4 < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$, la série entière converge absolument; et si $x^2/4 > 1$, c'est-à-dire $|x| > 2$, la série entière diverge grossièrement. Par définition, le rayon de convergence cherché vaut $R = 2$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

On voit donc que pour $x \in]-2, 2[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

En nommant $f(x)$ cette somme, on peut la dériver terme à terme en tant que somme de série entière, et pour tout $x \in]-2, 2[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}.$$

Où l'on voit que la somme cherchée converge et vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f'(1).$$

Explicitons f' et f à l'aide des fonctions usuelles sur l'intervalle $I =]-2, 2[$. Pour cela, trouvons une relation entre les coefficients de f , notés b_n . Pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2(2n+3)}$$

c'est-à-dire

$$2(2n+3)b_{n+1} = (n+1)b_n.$$

Utilisons cette relation pour établir une relation entre f et f' . Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n+1}, \\ f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)b_n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)b_{n+1} x^{2n+2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 2f'(x) &= 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2n+3)b_{n+1} x^{2n+2} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_n x^{2n+2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 4f'(x) &= 4 + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)b_n x^{2n+2} \\ &= 4 + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)b_n x^{2n} + x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n+1} \\ &= 4 + x^2 f'(x) + x f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E) \quad (4-x^2)y' - xy = 4.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, f est l'unique solution de (E) sur I telle que $f(0) = 0$.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$(H) \quad (4-x^2)y' - xy = 0$$

est $\mathcal{S}_I(H) = \text{Vect}(\varphi)$, où pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp\left(\int \frac{x}{4-x^2} dx\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(4-x^2)\right) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Commentaire. On ne s'inquiète pas d'une constante additive d'intégration dans l'exponentielle, qui se mue en une constante multiplicative hors de l'exponentielle, et ne change pas l'ensemble $\text{Vect}(\varphi)$.

Appliquons la méthode de variation de la constante pour trouver f : elle s'écrit $f = \varphi g$, où g est une fonction dérivable sur I telle que $g(0) = 0$, puisque $f(0) = 0$ et $\varphi(0) \neq 0$. En reportant dans (E), on a

$$\begin{aligned} (4-x^2)(\varphi'(x)g(x) + \varphi(x)g'(x)) - x\varphi(x)g(x) &= 4 \\ \iff (4-x^2)\varphi(x)g'(x) + \underbrace{((4-x^2)\varphi'(x) - x\varphi(x))g(x)}_{= 0 \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}_I(H)} &= 4 \\ \iff g'(x) &= \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \\ \iff g(x) &= 2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-(\frac{t}{2})^2}} = 4 \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{4 \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Et, en utilisant (E) plutôt que de dériver explicitement f , on obtient enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = f'(1) = \frac{4+1 \cdot f(1)}{4-1^2} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$