Corrigés des exercices de la septième feuille

71

Considérons l'évènement

A : « au moins l'une des cartes tirées est un roi ».

Voici une approche par l'évènement contraire. Il est bien-sûr possible de considérer directement l'évènement A. L'évènement contraire de A est

$\overline{A}$: « aucune des cartes tirées n'est un roi ».

La probabilité de tirer un roi d'un des jeux de cartes est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, donc la probabilité de tirer une carte qui ne soit pas un roi est $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$. Comme le tirage des cartes de chaque jeu est indépendant, $P(\overline{A}) = \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{144}{169}$. Alors $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{25}{169}$.

72

Considérons les évènements

— M : « la personne est malade »,

— T : « le test est positif ».

D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P(M \mid T) &= \frac{P(T \mid M)\, P(M)}{P(T \mid M)\, P(M) + P(T \mid \overline{M})\, P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}99 \cdot 10^{-4}}{0{,}99 \cdot 10^{-4} + 10^{-3}\,(1 - 10^{-4})} \\ &\approx 0{,}09. \end{aligned}$$

Commentaire. À l'inverse,

$$P(\overline{M} \mid T) = 1 - P(M \mid T) \approx 0{,}91.$$

Cela signifie que le test systématique de la population ne serait pas efficace, puisqu'une écrasante majorité des personnes révélées par le test seraient en réalité saines. Autrement dit, le test n'est pas assez fiable par rapport à la rareté de la maladie.

73 **CCP17**

1. Considérons les évènements T_1 « pour le premier tirage, on choisit l'urne U_1 » et T_2 « pour le premier tirage, on choisit l'urne U_2 ». Sans autre précision de l'énoncé, considérons que les évènements T_1 et T_2 sont équiprobables. Ils forment clairement un système complet d'évènements. Alors, d'après les probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(B_1 \mid T_1)\, P(T_1) + P(B_1 \mid T_2)\, P(T_2).$$

Comme l'urne U_1 contient 5 boules, dont deux blanches, $P(B_1 \mid T_1) = \frac{2}{5}$. De même, $P(B_1 \mid T_2) = \frac{4}{7}$. Alors

$$p_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

2. Pour tout $n \geqslant 2$, considérons les évènements $T_{n,i}$ « pour le n^{e} tirage, on choisit l'urne U_i », où $i \in \{1, 2\}$. Ils forment encore un système complet d'évènements. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_n &= P(B_n) \\ &= P(B_n \mid T_{n,1})\, P(T_{n,1}) + P(B_1 \mid T_{n,2})\, P(T_{n,2}). \end{aligned}$$

De même que plus haut, $P(B_n \mid T_{n,1}) = \frac{2}{5}$ et $P(B_1 \mid T_{n,2}) = \frac{4}{7}$, puisque les urnes U_i sont les mêmes au n^{e} tirage qu'au premier. En outre, le choix de l'urne U_1 pour le n^{e} tirage résulte de l'obtention d'une boule blanche au tirage précédent, donc $P(T_{n,1}) = P(B_{n-1}) = p_{n-1}$ et $P(T_{n,2}) = P(\,\overline{B_{n-1}}\,) = 1 - p_{n-1}$. Ainsi,

$$p_n = \frac{2}{5}\, p_{n-1} + \frac{4}{7}\,(1 - p_{n-1}) = -\frac{6}{35}\, p_{n-1} + \frac{4}{7}.$$

Ainsi, la suite (p_n) est arithmético-géométrique. Le point fixe ℓ de la fonction $x \mapsto -\frac{6}{35}\, x + \frac{4}{7}$ est $\ell = \frac{20}{41}$. En le retranchant à l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} p_n - \ell &= -\frac{6}{35}\, p_{n-1} + \frac{4}{7} - \ell \\ &= -\frac{6}{35}\, p_{n-1} + \frac{4}{7} - \left(-\frac{6}{35}\, \ell + \frac{4}{7}\right) \\ &= -\frac{6}{35}\,(p_{n-1} - \ell), \end{aligned}$$

donc la suite $(p_n - \ell)$ est géométrique et

$$p_n - \ell = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} (p_1 - \ell) = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} \left(-\frac{3}{1435}\right).$$

Finalement,

$$p_n = \frac{20}{41} + \frac{1}{82}\left(-\frac{6}{35}\right)^n.$$

74 **CCP**

Plusieurs résolutions sont possibles. En voici une. À vous d'en trouver d'autres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \mid A_n)\, P(A_n) \\ + P(A_{n+1} \mid B_n)\, P(B_n) \\ + P(A_{n+1} \mid C_n)\, P(C_n). \end{aligned}$$

Comme il change de point d'eau chaque jour, $P(A_{n+1} \mid A_n) = 0$. De plus, $P(A_{n+1} \mid B_n) = \frac{1}{2}$. En effet, quand il est au point B au jour n, il a autant de chance le jour $n+1$ de venir en A que d'aller en C. De même, $P(A_{n+1} \mid C_n) = \frac{1}{2}$. Alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}\,(b_n + c_n)$. En outre, toujours parce que A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, $a_n + b_n + c_n = 1$. Alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}\,(1 - a_n)$, et la suite (a_n) est arithmético-géométrique.

Cherchons ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}\,(1 - \ell)$: $\ell = \frac{1}{3}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de ℓ,

$$a_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}\,(1 - a_n) - \left(\frac{1}{2}\,(1 - \ell)\right) = -\frac{1}{2}\,(a_n - \ell).$$

La suite $(a_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc $a_n - \ell = (-\frac{1}{2})^n\,(a_0 - \ell)$. Comme $a_0 = 1$,

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De même, le suites (b_n) et (c_n) vérifient la même relation de récurrence, avec $b_0 = c_0 = 0$. En passant, elles sont donc égales :

$$b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

75 — **CS**

Préliminaires. L'énoncé n'est pas forcément très clair. Il s'agit de tirages avec remise, et même beaucoup de remises puisqu'on rajoute des boules parfois, en supposant bien-sûr que $a > 0$. Ensuite, l'évènement A_n considère que l'on tire des boules blanches à chaque fois lors des n premiers tirages.

Récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}).$$

Comme on ne peut avoir $n+1$ fois une boule blanche sans en avoir déjà tiré une à chaque fois sur les n premiers tirages, $P(A_{n+1}\,|\,\overline{A_n}) = 0$. Ensuite, quand on a tiré n fois une boule blanche, à chaque fois on rajoute a boules, donc au $(n+1)^{\text{e}}$ tirage, il y a dans l'urne $b+an$ boules blanches et donc $2b+an$ boules. Alors $P(A_{n+1}\,|\,A_n) = \dfrac{b+an}{2b+an}$. Et l'on obtient la relation attendue : $p_{n+1} = \dfrac{b+an}{2b+an}p_n$.

Limite. Tout d'abord, on voit que $p_{n+1}/p_n < 1$, donc la suite (p_n) décroit strictement. Comme elle est naturellement bornée, elle converge.

Ensuite, avec le logarithme,

$$\begin{aligned}\ln p_{n+1} - \ln p_n &= \ln(b+an) - \ln(2b+an)\\ &= \ln\Big(1+\frac{b}{an}\Big) - \ln\Big(1+\frac{2b}{an}\Big)\\ &= \frac{b}{an} - \frac{2b}{an} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\ &\sim -\frac{b}{an}.\end{aligned}$$

Comme la série harmonique diverge, la série $\sum(\ln p_{n+1} - \ln p_n)$ diverge, donc la suite $(\ln p_n)$ diverge. Or elle décroit, par croissance du logarithme et décroissance de (p_n), donc elle tend vers $-\infty$. Il s'ensuit que (p_n) tend vers 0, puisque $p_n = e^{\ln p_n}$ et par composition de limites.

76 — **MP15**

1. Comme les évènements E_n sont mutuellement indépendants, les $\overline{E_n}$ le sont aussi, et l'on aimerait dire

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} P(\overline{E_n}\,).$$

Malheureusement, la notion de produit infini n'est pas au programme, donc cette approche est exclue.

En revanche, d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{E_k}\right),$$

car la suite $\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{E_k}\,\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{k=0}^{n+1}\overline{E_k} = \left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{E_k}\right) \cap E_{n+1} \subset \bigcap_{k=0}^{n}\overline{E_k}.$$

Et l'on peut bien affirmer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{E_k}\right) = \prod_{k=0}^{n} P(\overline{E_k}\,),$$

grâce à la mutuelle indépendance évoquée plus haut.

De plus, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(\overline{E_k}\,) = 1 - P(E_k) \leqslant \exp\left(-P(E_k)\right).$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant 1-x$ par convexité. Ainsi,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} P(\overline{E_k}\,) &\leqslant \prod_{k=0}^{n} \exp\left(-P(E_k)\right)\\ &= \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} P(E_k)\right).\end{aligned}$$

Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(E_n)$ converge,

$$\lim_{n\to+\infty} -\sum_{k=0}^{n} P(E_k) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n),$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{E_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{E_k}\right)\\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} P(E_k)\right)\\ &= \exp\left(-\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n)\right),\end{aligned}$$

ce que l'on voulait.

Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(E_n)$ diverge, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(E_k) \geqslant 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} -\sum_{k=0}^{n} P(E_k) = -\infty.$$

Grâce à la limite de l'exponentielle en $-\infty$, on a donc

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{E_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{E_k}\right)\\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} P(E_k)\right) = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{E_n}\right) = 0.$$

On obtient à nouveau ce que l'on voulait, en écrivant

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n) = +\infty$$

et $\exp(-\infty) = 0$.

2. Considérons les évènements

— A : « la boule 10 sort une infinité de fois » ;

— et pour tout $n \geqslant 10$, A_n : « la boule 10 sort le n^{e} jour ».

Dire que A est réalisé signifie que pour tout $n \geqslant 10$, à partir du n^{e} jour, la boule 10 sort au moins une fois. Cela s'écrit

$$A = \bigcap_{n=10}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right).$$

La suite d'évènements $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n \geqslant 10}$ est décroissante, puisque pour tout $n \geqslant 10$,

$$\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) \supset \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k.$$

Donc, toujours d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right).$$

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 10$,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k} \right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right).$$

Avec la première question, sachant que les tirages sont mutuellement indépendants,

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k \geqslant n} P(A_k) \right).$$

Or, au k^{e} jour, l'urne contient k boules, donc $P(A_k) = 1/k$. Donc la série diverge et l'on a vu que cela entraine que

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \right) = 0.$$

Finalement, pour tout $n \geqslant 10$,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = 1 - 0 = 1,$$

d'où $P(A) = 1$.