

Huitième feuille d'exercices

VARIABLES ALÉATOIRES

77 ————— CCP

Un élément chimique émet des électrons pendant une durée T ; on note N la variable aléatoire qui dénombre les électrons émis et on admet que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un électron a une probabilité p d'être efficace, indépendamment des autres. On note X la variable aléatoire qui dénombre les électrons efficaces et Y celle qui dénombre ceux qui ne le sont pas.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X = k | N = j)$.
2. En déduire la loi marginale de X puis donner $E(X)$ et $V(X)$ sans calcul.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. En posant $N = X + Y$, calculer $\text{Cov}(X, N)$ et en commenter le signe.

78 —————

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X \geq n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(X = n | X \geq n).$$

1. a) Vérifier que $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y .

2. Dans le cas général, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k),$$

puis exprimer $p_n = P(X = n)$ en fonction des x_k .

3. Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n > 0$.

79 —————

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Considérons une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1 - p$ d'échouer. On la répète indépendamment jusqu'à obtenir m succès et l'on note X le nombre d'essais nécessaires à leur obtention.

1. Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.
2. Déterminer la loi de X pour $m \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-t)^m}.$$

4. Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X .

80 ————— 14

On tire au sort un nombre réel entre 0 et 1 et l'on modélise le tirage de la façon suivante : $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme à valeurs dans $]0, 9[$; les X_n représentent les décimales du nombre tiré au hasard, lequel est donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{10^n}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on définit une variable aléatoire Y_k par $Y_k = 1$ si $X_k = 1$ et $Y_k = 0$ sinon. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Ainsi, S_n/n représente la fréquence des 1 dans les n premières décimales du nombre aléatoire tiré.

1. Montrer que les variables Y_k sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.
2. Calculer $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$.
3. Calculer $V(S_n/n)$ en fonction de n .
4. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2}.$$

5. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

81 ————— CCP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire N qui vaut 0 si $X_1 = \dots = X_n = 1$ et $\min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid X_k = 0\}$ sinon.

82 ————— CCP

1. Soit une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

2. Considérons alors une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $N + 1 \sim \mathcal{G}(p)$.

- a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, calculer

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

- b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(S_N = k)$.