Corrigés des exercices de la huitième feuille

77 — **CCP**

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que $N = j$. Sachant que chacun des j électrons émis est efficace indépendamment des autres, le nombre de ceux qui le sont suit une loi binomiale $\mathscr{B}(j,p)$. Donc pour tout $k \in [\![0,j]\!]$,

$$P(X = k \,|\, N = j) = \binom{j}{k} p^k\, q^{j-k},$$

en notant $q = 1 - p$.

2. Les évènements $(N = j)_{j\in\mathbb{N}}$ forment un système complet donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = k \,|\, N = j)\, P(N = j)\\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} P(X = k \,|\, N = j)\, P(N = j)\\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{j!}{k!\,(j-k)!}\, p^k\, q^{j-k}\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^j}{j!}\\
&= e^{-\lambda} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{p^k\, q^{j-k}\, \lambda^k\, \lambda^{j-k}}{k!\,(j-k)!}\\
&= e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{j-k}}{(j-k)!}\\
&= e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{\lambda q} = e^{-\lambda p}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!},
\end{aligned}$$

car $p + q = 1$. Ainsi, $X \sim \mathscr{P}(\lambda p)$ et $E(X) = \lambda p$, $V(X) = \lambda p$.

3. La réponse est surement oui, sachant que les électrons sont efficaces indépendamment les uns des autres. Prouvons-le.

Sur le même principe que plus haut, en inversant les rôles de p et q, $Y \sim \mathscr{P}(\lambda q)$. Soient k et ℓ des entiers. Comme $N = X + Y$,

$$\begin{aligned}
P((X = k) \cap (Y = \ell)) &= P((X = k) \cap (N = k + \ell))\\
&= P(X = k \,|\, N = k + \ell)\, P(N = k + \ell)\\
&= \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\, p^k\, q^\ell\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\\
&= e^{-\lambda(p+q)}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!}\\
&= P(X = k)\, P(Y = \ell).
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que l'on a bien $X \perp\!\!\!\perp Y$, comme on le pensait.

4. Comme $N = X + Y$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,N) &= \operatorname{Cov}(X, X+Y)\\
&= \operatorname{Cov}(X,X) + \operatorname{Cov}(X,Y) = V(X),
\end{aligned}$$

car $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Or $X \neq 0$, donc $V(X) > 0$. Ainsi, $\operatorname{Cov}(X,N) > 0$ donc en particulier, $\operatorname{Cov}(X,N) \neq 0$. Cela entraine que X et N ne sont pas indépendantes.

78

1.a. Comme $P(Y = n) \sim 1/n^2$, $\sum P(Y = n)$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} P(Y = n) &= \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\\
&= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$, et l'on a bien une loi de probabilité d'après le cours.

1.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P(Y \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(Y = n \,|\, Y \geqslant n) &= \frac{P(Y = n, Y \geqslant n)}{P(Y \geqslant n)}\\
&= \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$1 - x_k = 1 - P(X = k \,|\, X \geqslant k) = P(\overline{X = k} \,|\, X \geqslant k),$$

car la probabilité conditionnelle sachant $(X \geqslant k)$ est une probabilité. Donc

$$\begin{aligned}
1 - x_k &= P(X \neq k \,|\, X \geqslant k)\\
&= \frac{P(X \neq k, X \geqslant k)}{P(X \geqslant k)} = \frac{P(X \geqslant k+1)}{P(X \geqslant k)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(X \geqslant k+1)}{P(X \geqslant k)}\\
&= \frac{P(X \geqslant n)}{P(X \geqslant 0)} = P(X \geqslant n).
\end{aligned}$$

D'après un calcul de la question 1.b,

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= P(X = n, X \geqslant n)\\
&= P(X = n \,|\, X \geqslant n)\, P(X \geqslant n)\\
&= x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k).
\end{aligned}$$

Bien-sûr par convention, si $n = 0$, le produit vaut 1.

3. Supposons que X admette un taux de panne constant, noté a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a$ et

$$P(X = n) = a \prod_{k=0}^{n-1} (1 - a) = a\,(1 - a)^n.$$

On voit que forcément $a \in \,]0,1[$. Et l'on reconnait qu'alors $X + 1 \sim \mathscr{G}(a)$.

Réciproquement, si $X + 1 \sim \mathscr{G}(a)$, on vérifie sans peine que le taux de panne de X vaut a.

Commentaire. Le décalage de 1 vient de ce qu'une variable qui suit la loi géométrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et l'énoncé considère que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

79

1. D'après le cours, si $m = 1$, $X \sim \mathscr{G}(p)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons X_n la variable aléatoire qui teste la réussite de chaque expérience : $X_n \sim \mathscr{B}(p)$. L'évènement $(X = n)$ traduit le fait que l'on obtient m succès pour la première fois à la n^{e} expérience, donc d'une part, cette dernière expérience est un succès, donc $X_n = 1$, et parmi les expériences précédentes, on n'a obtenu que $m - 1$ succès : ainsi

$$(X = n) = (X_1 + \cdots + X_{n-1} = m - 1) \cap (X_n = 1).$$

Puisque les X_i sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $X_n \perp\!\!\!\perp X_1 + \cdots + X_{n-1}$, donc

$$P(X = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = m - 1\right) P(X_n = 1).$$

On sait que $\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sim \mathscr{B}(n-1, p)$ donc

$$P(X = n) = \binom{n-1}{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m} p.$$

Ce résultat est encore valable quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.

3. D'après le cours, pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$,

$$\frac{1}{(1-t)^m} = (1-t)^{-m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-m}{n} (-t)^n.$$

Or, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\binom{-m}{n} &= \frac{-m(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!} \\ &= (-1)^n \binom{m+n-1}{m-1},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{m-1} t^n.$$

4. Pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} t^n \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} t^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m+k-1}{m-1} p^m (1-p)^k t^{m+k}\end{aligned}$$

où l'on a posé $n = m + k$,

$$\begin{aligned}&= (pt)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m+k-1}{m-1} ((1-p)t)^k \\ &= \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^m.\end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable en 1, donc X est d'espérance finie et $E(X) = G'_X(1) = m/p$.

80 **14**

1. Puisque les X_k sont indépendantes, les Y_k le sont aussi. En outre, pour $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k représente la possibilité que la k^{e} décimale soit 1, donc $Y_k \sim \mathscr{B}(\frac{1}{10})$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le cours, $E(Y_k) = \frac{1}{10}$ et $V(Y_k) = \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10}) = \frac{9}{100}$.

3. Puisque les Y_k sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli, $S_n \sim \mathscr{B}(n, \frac{1}{10})$. Alors,

$$V(S_n/n) = V(S_n)/n^2 = n\,E(Y_1)/n^2 = \tfrac{9}{100n}.$$

4. C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n/n. En effet,

$$E(S_n/n) = E(S_n)/n = n\,E(Y_1)/n = \tfrac{1}{10}.$$

5. C'est évident en appliquant les deux questions précédentes. Mais surtout on reconnait la loi faible des grands nombres appliquée à la suite (Y_k).

81 **CCP**

D'abord, $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Dire que $N = 0$ signifie que les X_k valent tous 1, donc en termes d'évènements,

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1).$$

Puisque les X_k sont indépendantes, on peut dire que

$$\begin{aligned}P(N = 0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. Dire que $N = k$ signifie que les X_j valent 1 si $j < k$, puis $X_k = 0$, et les valeurs suivantes n'importent pas, donc

$$(N = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = 1)\right) \cap (X_k = 0),$$

et, toujours grâce à l'indépendance des X_k,

$$\begin{aligned}P(N = k) &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = 1)\right) P(X_k = 0) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{k-1}{k!}.\end{aligned}$$

82 — CCP

1. D'après le cours, $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.

2. Commençons par déterminer la loi de N. Comme $N+1 \sim \mathscr{G}(p)$, $(N+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $N(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P(N+1=n+1) \\ &= p\,(1-p)^{(n+1)-1} = p\,(1-p)^n. \end{aligned}$$

2.a. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$. Comme on a le droit de dériver terme à terme les séries entières, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\, x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n) = \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\ &= \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

2.b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $S_N(\Omega) = [\![0,N]\!]$, pour réaliser $S_N = k$, il est nécessaire que $N \geqslant k$. Avec les probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} P(S_N=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_N=k\,|\,N=n)\,P(N=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k)\,P(N=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,p\,(1-p)^n \\ &= p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1-p)^{2n-k} \\ &= p^{k+1}\,(1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1-p)^{2(n-k)} \\ &= \frac{p^{k+1}\,(1-p)^k}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} \\ &= \frac{p^{k+1}\,(1-p)^k}{(2p-p^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^k}{(2-p)^{k+1}}. \end{aligned}$$