Neuvième feuille d'exercices

Matrices & déterminants

83

Considérons la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer H^p pour $p \in \mathbb{N}$.

2. En déduire les inverses des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

84 — **MP**

Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & & (0) \\ a & 1+a^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

85

Calculer $\det(A)$ où $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifie $a_{ii} = a$, $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{ij} = 0$ sinon, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

86 — **AM**

1. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^4,\ P \mapsto (P(0), P(1), P(2), P(3))$$

est-elle bijective ?

2. Dans ce cas, donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer les antécédents de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

87

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$, dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$ est

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

88 — **CS**

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ii} = 2\cos\theta$, $a_{ij} = -1$ si $|j-i| = 1$, $a_{ij} = 0$ sinon. Calculer $\det(A_n)$.

89

Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ et

$$\Phi : E \to E,\ P(X) \mapsto P(1-X).$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathfrak{L}(E)$ et donner sa matrice dans la base canonique de E.

2. Montrer que la famille $((X - \frac{1}{2})^k)_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ est une base de E.

3. Donner la matrice de Φ dans cette base.

90 — **AM**

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes C_j, $j \in [\![1, n]\!]$. Calculer, en fonction de $\det(M)$, le déterminant de la matrice M' de colonnes

$$C'_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} C_i,\ j \in [\![1, n]\!].$$

91 — **PM**

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3) \smallsetminus \{0\}$ tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

92 — **CCP**

Soient n un entier, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Φ l'application qui à tout $P \in E$ associe le polynôme

$$\Phi(P)(X) = \int_X^{X+1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2. Calculer son déterminant.

93 — **CCP**

Considérons $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

1. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?

2. On suppose que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que la matrice de f dans la base canonique s'écrive

$$\begin{pmatrix} r\cos\alpha\sin\alpha & -r\cos^2\alpha \\ r\sin^2\alpha & -r\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

94 — **IIE**

Montrer que A et T sont semblables, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$