Corrigés des exercices de la neuvième feuille

83

1. Sans difficulté, $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $p \geq 3$, $H^p = 0$.

2. Nommons A et B les deux matrices.

Constatons que $A = I_3 + aH + a^2H^2$. De l'identité $(1 - X)(1 + X + X^2) = 1 - X^3$, on tire $(I_3 - aH)A = I_3 - a^3H^3 = I_3$. Alors A est inversible et

$$A^{-1} = I_3 - aH = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on voit que $B = I_3 + 2H + 3H^2 = P(H)$ où $P = 1 + 2X + 3X^2$. On pense à la dérivation. Dans $\mathbb{R}(X)$,

$$\begin{aligned} P &= (1 + X + X^2 + X^3)' \\ &= \left(\frac{1 - X^4}{1 - X} \right)' = \frac{1 - 4X^3 + 3X^4}{(1 - X)^2}, \end{aligned}$$

d'où $(1 - X)^2 P = 1 - 4X^3 + 3X^4$. En évaluant cette égalité polynomiale en H , on obtient $(I_3 - H)^2 B = I_3 - 4H^3 + 3H^4 = I_3$, donc B est inversible et

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (I_3 - H)^2 \\ &= I_3 - 2H + H^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

84

MP

En développant D_n par rapport à la première colonne, pour tout $n \geq 2$,

$$D_n = (1 + a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}.$$

C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - (1 + a^2)r + a^2 = 0$, dont les racines sont clairement 1 et a^2 . Alors, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = A \cdot 1^n + B \cdot (a^2)^n$. Comme $D_1 = 1 + a^2$ et $D_2 = 1 + a^2 + a^4$, on trouve

$$A = \frac{1}{1 - a^2} \text{ et } B = \frac{-a^2}{1 - a^2},$$

d'où

$$D_n = \frac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2} = \sum_{k=0}^n a^{2k}.$$

Bien-sûr, ce calcul n'est pas valide si $a = 1$.

Dans le cas où $a = 1$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Ici, l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui admet 1 comme racine double. Alors, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que $D_n = (A + Bn)1^n$. Comme $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, on trouve $A = B = 1$ et $D_n = n + 1$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \sum_{k=0}^n a^{2k}.$$

85

Le déterminant est

$$\begin{vmatrix} a & & (0) & & b \\ & \ddots & & \ddots & \\ (0) & & a & b & \\ & & b & a & (0) \\ & & & \ddots & \\ b & & & (0) & a \end{vmatrix}_{2n}.$$

Faisons $C_j \leftarrow C_j + C_{2n-j+1}$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_{2n-i+1}$ pour $i \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$. Alors le déterminant devient triangulaire et vaut $(a^2 - b^2)^n$.

86

AM

1. D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est clairement linéaire.

Supposons que φ est bijective. Alors on doit avoir $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^4)$, c'est-à-dire $n + 1 = 4$, d'où $n = 3$.

Réciproquement, supposons que $n = 3$. Pour montrer que φ est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective puisque $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathbb{R}^4)$. Soit $P \in \text{Ker } \varphi$. Alors $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$, donc P admet 0, 1, 2 et 3 comme racines. Comme $\deg P \leq 3$ et qu'il admet 4 racines distinctes, $P = 0$. Donc $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ et φ est injective, donc bijective.

Finalement, φ est bijective si et seulement si $n = 3$.

2. Les images par φ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ sont

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= (1, 1, 1, 1), & \varphi(X) &= (0, 1, 2, 3), \\ \varphi(X^2) &= (0, 1, 4, 9), & \varphi(X^3) &= (0, 1, 8, 27). \end{aligned}$$

La matrice de φ demandée est donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

3. Pour obtenir les antécédents de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, il suffit d'inverser la matrice A . On trouve facilement (hum :-), par exemple avec la méthode de Gauss-Jordan, que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}((1, 0, 0, 0)) &= 1 - \frac{11}{6}X + X^2 - \frac{1}{6}X^3, \\ \varphi^{-1}((0, 1, 0, 0)) &= 3X - \frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3, \\ \varphi^{-1}((0, 0, 1, 0)) &= -\frac{3}{2}X + 2X^2 - \frac{1}{2}X^3, \\ \varphi^{-1}((0, 0, 0, 1)) &= \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3. \end{aligned}$$

Commentaire. On peut aussi reconnaître les polynômes d'interpolation de Lagrange des réels 0, 1, 2, 3.

87

On confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$ avec les vecteurs colonnes de 5 lignes et 4 lignes, respectivement.

PIVOT. Appliquons le pivot de Gauss en colonnes à la matrice M de l'énoncé. Les opérations sont effectuées dans l'ordre où elles sont écrites. On a

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 1 & -6 & 2 \\ 1 & 9 & 1 & 13 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_2 \leftarrow 5C_2 - C_1 \\ C_4 \leftarrow 5C_4 - 7C_1 \\ C_5 \leftarrow 5C_5 - 6C_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 9 & 13 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_2 \leftrightarrow C_3 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 5C_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_3 \end{array}$$

Ainsi, en comptant 4 termes diagonaux non nuls, on voit que $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = 4$.

IMAGE DE f . Les colonnes des matrices précédentes sont constamment dans $\text{Im } f$, donc

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

Alternativement, puisque $\text{rg}(f) = 4$, une base de $\text{Im } f$ est tout simplement la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

NOYAU DE f . Enfin, en remontant les calculs précédents, c'est-à-dire en exprimant les colonnes de chaque étape en fonction de celles de l'étape précédente, on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_5 - C_3 = (C_5 - 5C_3) - C_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (5C_5 - 6C_1) - 5C_3 - (5C_2 - C_1)$$

$$= -5C_1 - 5C_2 - 5C_3 + 5C_5$$

$$= \underbrace{(C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5)}_M \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Ker } f.$$

Mais $\dim \mathbb{R}^5 = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$ d'après le théorème du rang, donc $\dim(\text{Ker } f) = 1$ et

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. Si l'on avait déterminé le noyau d'abord, par exemple en résolvant le système $MX = 0$, on aurait vu que sa dimension est 1, donc que le rang de A vaut 4, et que donc, son image est $\mathbb{R}^4$ tout entier.

88

CS

En développant $D_n = \det(A_n)$ par rapport à sa première colonne, on a $D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2}$. Cette récurrence linéaire d'ordre 2 a pour équation caractéristique $r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$. Alors, $D_n = \alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)$. On trouve α et β avec $D_1 = 2 \cos \theta$ et $D_2 = 4 \cos^2 \theta - 1$:

$$D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin(n\theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}.$$

Commentaire. Le cas où $\sin \theta = 0$ est laissé au lecteur :-)

89

1. Pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $(1-X)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j X^j$, donc la matrice de Φ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, notons $P_k = (X - \frac{1}{2})^k$. Les polynômes P_k ont des degrés distincts deux à deux, donc la famille (P_k) est libre. Comme elle contient 4 éléments, c'est une base de E .

3. Pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on voit que

$$P_k(1-X) = (\frac{1}{2} - X)^k = (-1)^k P_k$$

donc la matrice de Φ dans la base (P_k) est

$$\text{diag}(1, -1, 1, -1).$$

90

AM

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\det(M') = \det_{\mathcal{B}}(C'_1, C'_2, \dots, C'_n).$$

Comme le suggère l'énoncé, notons $S = \sum_{i=1}^n C_i$ la somme des colonnes de M . Alors les colonnes de M' sont $C'_k = S - C_k$:

$$\det(M') = \det_{\mathcal{B}}(S - C_1, S - C_2, \dots, S - C_n).$$

En ajoutant les autres colonnes de ce déterminant à la première, puis en factorisant la première colonne,

$$\det(M') = \det_{\mathcal{B}}((n-1)S, S - C_2, \dots, S - C_n)$$

$$= (n-1) \det_{\mathcal{B}}(S, S - C_2, \dots, S - C_n).$$

En soustrayant la première colonne aux autres,

$$\det(M') = (n-1) \det_{\mathcal{B}}(S, -C_2, \dots, -C_n).$$

Enfin, en ajoutant à nouveau les autres colonnes à la première,

$$\det(M') = (n-1) \det_{\mathcal{B}}(C_1, -C_2, \dots, -C_n)$$

$$= (n-1)(-1)^{n-1} \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

$$= (n-1)(-1)^{n-1} \det(M).$$

91 ————— **MT**

1. Tout d'abord, d'après le théorème du rang,

$$3 = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f),$$

donc il suffit de montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f + \text{Im } f$ ou que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. D'une part, $f(x) = 0$ et d'autre part, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(y)$. Alors, $f^2(y) = f(x) = 0$, donc $f^3(y) = 0$. Mais $f^3 = -f$, donc $-f(y) = 0$, d'où $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ et $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

2. Dans une base adaptée à cette somme directe, la première colonne de la matrice de f sera nulle. Construisons une telle base. Il suffit de choisir $k \in \text{Ker } f \setminus \{0\}$ et une base (a, b) de $\text{Im } f$.

Soit $a \in \text{Im } f \setminus \{0\}$: c'est possible car $f \neq 0$. Il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a = f(c) = -f^3(c) = -f^2(f(c)) = -f^2(a).$$

Alors, en posant $b = -f(a)$, on voit que $f(b) = a$, et naturellement $f(a) = -b$. Alors, si (a, b) est une base de $\text{Im } f$, dans la base (k, a, b) , la matrice de f a la forme voulue.

Montrons que (a, b) est une base $\text{Im } f$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a + \mu b = 0$ (*). En appliquant f , comme $f(a) = -b$ et $f(b) = a$, $-\lambda b + \mu a = 0$ (**). En faisant $\lambda(*) + \mu(**)$, on obtient $(\lambda^2 + \mu^2)a = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$ (car $a \neq 0$) et (a, b) est libre, donc c'est bien une base de $\text{Im } f$.

92 ————— **CCP**

1. Par linéarité de l'intégrale, Φ est clairement linéaire. Soit $P \in E$. On a

$$\Phi(P)'(X) = P(X+1) - P(X).$$

Or $P(X+1)$ et $P(X)$ ont même terme de plus haut degré, donc $\deg(\Phi(P)') \leq \deg(P) - 1$. Il s'ensuit que $\deg(\Phi(P)) \leq \deg(P) \leq n$ et $\Phi(P) \in E$. Finalement, $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Déterminons la matrice de Φ dans la base canonique de E . Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \Phi(X^k) &= \int_X^{X+1} t^k dt \\ &= \frac{1}{k+1} ((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} X^j \\ &= \begin{cases} X^k + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} X^j & \text{si } k \geq 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors la matrice de Φ est triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Donc $\det(\Phi) = 1$.

93 ————— **CCP**

1. D'après le théorème du rang,

$$2 = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = 2 \dim(\text{Ker } f)$$

donc $\dim(\text{Ker } f) = 1$.

2. Puisque $\text{Im } f = \text{Ker } f = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$, la matrice de f dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} a \cos \alpha & b \cos \alpha \\ a \sin \alpha & b \sin \alpha \end{pmatrix},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En outre, on doit avoir

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha \sin \alpha \\ a \cos \alpha \sin \alpha + b \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \\ &= (a \cos \alpha + b \sin \alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ ne sont pas nuls en même temps, $a \cos \alpha + b \sin \alpha = 0$. Alors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est sur la droite de $\mathbb{R}^2$

dirigée par $\begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$, donc il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}. \text{ Finalement,}$$

$$M = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \sin \alpha & -r \cos^2 \alpha \\ r \sin^2 \alpha & -r \cos \alpha \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

94 ————— **IIE**

Nommons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A . Nous cherchons une nouvelle base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u soit T . Alors on doit avoir $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$. En exprimant ces égalités vectorielles dans la base (e_1, e_2, e_3) , en notant x_i, y_i et z_i les coordonnées de ε_i dans la base canonique, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on résout

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

d'où $x_1 = 0$ et $4y_1 + z_1 = 0$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De même, on résout

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

d'où $x_2 = \frac{1}{2}$ et $4y_2 + z_2 = 0$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on résout

$$A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

d'où $x_3 + y_3 = 0$ et $2y_3 + z_3 = 0$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut écrire $A = PTP^{-1}$ en posant

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que A et T sont bien semblables.