Exercices de colles – première semaine

I — AM

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \cos(2x).$$

. . . .

Présentation. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : nommons-la (E).

Équation homogène. L'équation homogène associée est (H) $y'' + 4y = 0$; l'équation caractéristique est (C) $r^2 + 4 = 0$, dont les racines sont $\pm 2i$. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) est

$$\{x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x),\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Solution particulière. Comme $\cos(2x) = \mathrm{Re}(e^{2ix})$, cherchons une solution particulière ψ_1 de l'équation (E_1) $y'' + 4y = e^{2ix}$. Une solution particulière de (E) sera alors $\psi = \mathrm{Re}(\psi_1)$.

Le second membre de (E_1) est de la forme $P(x)\,e^{sx}$, où $\deg P = 0$ et $s = 2i$ est racine simple de (C), donc on peut chercher ψ_1 sous la forme $\psi_1(x) = x\,Q(x)\,e^{sx}$, où $\deg Q = 0$. On trouve $Q = -i/4$, donc $\psi(x) = \frac{1}{4}x\sin(2x)$.

Équation complète. Finalement, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est

$$\{x \mapsto \tfrac{1}{4}x\sin(2x) + \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x),\quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

II — MP

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

. . . .

Soit f une solution. Alors, f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable, et par récurrence, f est $\mathscr{C}^\infty$.

En dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(-x) = e^x$. Comme $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$, il s'ensuit que $f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x} = 2\,\mathrm{ch}\,x$. Alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{ch}\,x + \alpha\cos x + \beta\sin x.$$

En reportant dans l'équation du départ,

$$f'(x) + f(-x) = e^x + (\alpha+\beta)(\cos x - \sin x).$$

Donc on doit avoir $\alpha + \beta = 0$. Finalement, l'ensemble des solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ est

$$\{f : x \mapsto \mathrm{ch}\,x + \alpha(\cos x - \sin x),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Commentaire. On aurait également pu résoudre en décomposant f en somme de ses parties paire et impaire. Mais c'est plus long.

III — AM

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = (1 + x^2)\,e^x.$$

. . . .

Présentation. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : nommons-la (E).

Équation homogène. L'équation homogène associée est (H) $y'' - 2y' + y = 0$; l'équation caractéristique est (C) $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) est

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta)\,e^x,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Solution particulière. Le second membre de (E) est de la forme $P(x)\,e^{sx}$, où $\deg P = 2$ et $s = 1$ est racine double de (C), donc on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$\psi(x) = x^2\,Q(x)\,e^{sx} = R(x)\,e^x,$$

où $\deg Q = 2$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = (R'(x) + R(x))\,e^x,$$
$$\psi''(x) = (R''(x) + 2R'(x) + R(x))\,e^x.$$

En reportant dans (E), on obtient

$$R''(x) = 1 + x^2, \text{ d'où } R(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^4.$$

On a choisi les deux constantes d'intégration nulles, car l'on peut factoriser $R(x)$ par x^2.

Équation complète. Finalement, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est

$$\{x \mapsto x^2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}x^2\right)e^x + (\alpha x + \beta)\,e^x,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

IV — MP

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$(E) \qquad y'' + \omega^2 y = f.$$

Montrer que la fonction

$$\psi : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin(\omega(x-t))\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+$.

. . . .

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme il est à la fois dans l'intégrale et sur ses bornes, transformons l'écriture :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{\omega}\int_0^x (\sin(\omega x)\cos(\omega t) \\ &\qquad - \cos(\omega x)\sin(\omega t))\,f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin(\omega x)}{\omega}\int_0^x f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad - \frac{\cos(\omega x)}{\omega}\int_0^x f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Les fonctions $c : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $s : x \mapsto \sin(\omega x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction cf est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction

$$C : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x \cos(\omega t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{c(t)\,f(t)}{\omega}\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de $\frac{1}{\omega}\, c\, f$ nulle en 0, et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x s(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\psi = sC - cS$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi' = \omega\, c\, C + \tfrac{1}{\omega}\, s\, c\, f + \omega\, s\, S - \tfrac{1}{\omega}\, c\, s\, f = \omega\,(cC + sS).$$

On voit que ψ' est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi'' = -\omega^2\, s\, C + c^2\, f + \omega^2\, c\, S + s^2\, f = -\omega^2\, \psi + f.$$

La fonction ψ est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

Alors, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\{\psi + \alpha\, c + \beta\, s,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

V — AM

Résoudre $y'' + 2y' + y = x\,\mathrm{sh}\, x$.

. . . .

Équation homogène. L'équation caractéristique est (C) $r^2 + 2r + 1 = 0$, dont -1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto (\alpha\, x + \beta)\, e^{-x},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Solution particulière. Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}\, x\, e^{x} - \frac{1}{2}\, x\, e^{-x}$. Donc grâce au théorème de superposition, cherchons séparément une solution particulière des deux équations

$$(E_1) \qquad y'' + 2y' + y = \tfrac{1}{2}\, x\, e^{x},$$

$$(E_2) \qquad y'' + 2y' + y = -\tfrac{1}{2}\, x\, e^{-x}.$$

Comme 1 n'est pas racine de (C), on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $\psi_1(x) = (ax+b)\, e^{x}$, et on trouve $\psi_1(x) = \frac{1}{8}\,(x-1)\, e^{x}$.

En revanche, -1 est racine double de (C), donc on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $\psi_2(x) = Q(x)\, e^{-x}$ où $\deg Q = 3$, et l'on trouve $Q(x) = -\frac{1}{12}\, x^3$, par exemple.

Une solution particulière de (E) est $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\Big\{x \mapsto \tfrac{1}{8}\,(x-1)\, e^{x} - \tfrac{1}{12}\, x^3\, e^{-x} + (\alpha\, x + \beta)\, e^{-x},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

VI — CCP

Résoudre l'équation différentielle

$$2\,x\,(x+1)\, y' + (3x+4)\, y = 2\,x\,\sqrt{x+1}.$$

. . . .

Présentation. Les fonctions $x \mapsto 2\,x\,(x+1)$ et $x \mapsto 3\,x + 4$ sont continues sur $\mathbb{R}$, mais la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ n'est définie et continue que sur $[-1, +\infty[$. En outre, les singularités de (E) sont 0 et -1 donc on étudie l'équation (E) sur $I_1 = \,]-1, 0[$ ou $I_2 = \,]0, +\infty[$.

Équation homogène. Sur I_k, pour $k \in \{1, 2\}$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\Big\{x \mapsto \alpha_k \exp\Big(-\int \frac{3\,x+4}{2\,x\,(x+1)}\,\mathrm{d}x\Big) = \alpha_k\, \frac{\sqrt{x+1}}{x^2},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Variation de la constante. Considérons

$$\varphi : x \mapsto \sqrt{x+1}/x^2.$$

Sur I_k, on cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \alpha_k\, \varphi$, où α_k est une fonction dérivable sur I_k. En reportant dans (E), on trouve

$$\begin{aligned} & 2\,x\,(x+1)\, \alpha_k'(x)\, \varphi(x) = 2\,x\,\sqrt{x+1} \\ \iff\ & \alpha_k'(x) = x^2/(x+1) \\ \iff\ & \alpha_k(x) = \tfrac{1}{2}\, x^2 - x + \ln(x+1) + \beta_k,\ \beta_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\Big\{x \mapsto (\tfrac{1}{2}\, x^2 - x + \ln(x+1) + \beta_k)\, \frac{\sqrt{x+1}}{x^2},\ \beta_k \in \mathbb{R}\Big\}.$$