Exercices de colles – dixième semaine

I ————— CCP15

1. Soit une variable aléatoire Y telle que $Y \sim \mathcal{P}(2)$. Déterminer la loi de $T = 1 + Y$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \frac{e^{-2} 4^k (1 + \alpha k)}{(2k)!}.$$

a. Donner une condition sur α pour que la famille (p_k) définisse une loi de probabilité.

b. On suppose cette condition réalisée. Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suive la loi précédente.

1. D'abord, comme $Y \sim \mathcal{P}(2)$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(1 + Y = n) = P(Y = n - 1) \\ &= e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

2.a. Comme $\alpha \geq 0$, les p_k sont strictement positifs, donc la famille $(p_k)_{k \geq 0}$ définit une loi de probabilité si et seulement si sa somme est 1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2} 4^k (1 + \alpha k)}{(2k)!} \\ &= e^{-2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(2k)!} + \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k k}{(2k)!} \right) \\ &= e^{-2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} + \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \\ &= e^{-2} (\operatorname{ch} 2 + \alpha \operatorname{sh} 2). \end{aligned}$$

Les calculs sont valides car on n'a manié que des termes positifs et que le résultat est fini. Comme cette somme doit valoir 1 et que $\operatorname{ch} 2 + \operatorname{sh} 2 = e^2$,

$$\alpha = \frac{e^2 - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2} = 1.$$

2.b. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{e^{-2} 4^k (1 + k)}{(2k)!}.$$

Alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2} 4^k k (k + 1)}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2} 4^{k-1} (2k) (2k + 2)}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2} 4^{k-1} (2k - 1 + 3)}{(2k - 1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2} 2^{2k-2} (2k - 1)}{(2k - 1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2} 2^{2k-2} 3}{(2k - 1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} + \frac{3}{2} e^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= e^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} + \frac{3}{2} e^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= e^{-2} \left(\operatorname{ch} 2 + \frac{3}{2} \operatorname{sh} 2 \right) = \frac{5 - e^{-4}}{4}. \end{aligned}$$

Là encore, les calculs sont valides pour la même raison que précédemment.

II ————— CCP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ telles que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{k}.$$

Trouver la loi de la variable aléatoire N définie par

$$N = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 = \dots = X_n = 1, \\ \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid X_k = 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'abord, $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Dire que $N = 0$ signifie que les X_k valent tous 1, donc en termes d'évènements,

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 1).$$

Puisque les X_k sont indépendantes, on peut dire que

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = 1)\right) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k = 1) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dire que $N = k$ signifie que les X_j valent 1 si $j < k$, puis $X_k = 0$, et les valeurs suivantes n'importent pas, donc

$$(N = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = 1) \right) \cap (X_k = 0),$$

et, toujours grâce à l'indépendance des X_k ,

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = 1) \right) P(X_k = 0) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{k-1}{k!}. \end{aligned}$$

III

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X \geq n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(X = n | X \geq n).$$

1. a) Vérifier que $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y .

2. Dans le cas général, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k),$$

puis exprimer $p_n = P(X = n)$ en fonction des x_k .

3. Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n > 0$.

1.a. Comme $P(Y = n) \sim 1/n^2$, $\sum P(Y = n)$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

où l'on a reconnu une somme télescopique. On obtient bien une loi de probabilité.

1.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toujours avec une somme télescopique,

$$P(Y \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Y = n | Y \geq n) &= \frac{P(Y = n, Y \geq n)}{P(Y \geq n)} \\ &= \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$1 - x_k = 1 - P(X = k | X \geq k) = P(\overline{X = k} | X \geq k),$$

car la probabilité conditionnelle sachant $(X \geq k)$ est une probabilité. Donc

$$\begin{aligned} 1 - x_k &= P(X \neq k | X \geq k) \\ &= \frac{P(X \neq k, X \geq k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X \geq k+1)}{P(X \geq k)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(X \geq k+1)}{P(X \geq k)} \\ &= \frac{P(X \geq n)}{P(X \geq 0)} = P(X \geq n). \end{aligned}$$

D'après un calcul de la question 1.b,

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X = n, X \geq n) \\ &= P(X = n | X \geq n) P(X \geq n) \\ &= x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k). \end{aligned}$$

Bien-sûr par convention, si $n = 0$, le produit vaut 1.

3. Supposons que X admette un taux de panne constant, noté a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a$ et

$$P(X = n) = a \prod_{k=0}^{n-1} (1 - a) = a(1 - a)^n.$$

On voit que forcément $a \in]0, 1[$. Et l'on reconnaît qu'alors $X + 1 \sim \mathcal{G}(a)$.

Réciproquement, si $X + 1 \sim \mathcal{G}(a)$, on vérifie sans peine que le taux de panne de X vaut a .

Commentaire. Le décalage de 1 vient de ce qu'une variable qui suit la loi géométrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et l'énoncé considère que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.