Exercices de colles – onzième semaine

I — **AM**

Nature de la série $\sum e^{-1/n}/n$.

. . . .

Le terme général u_n est positif et $u_n \sim \frac{1}{n}$; or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

II — **CCP**

Donner un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

. . . .

Notons S_n cette somme, où $n \in \mathbb{N}^*$. Voici deux approches.

Sommes de Riemann. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}.$$

D'après le théorème des sommes de Riemann, comme la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$ est continue sur $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

Donc, quand n tend vers l'infini,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\,n,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 2(\sqrt{2}-1)n,$$

car $\frac{1}{\sqrt{2}} \ll n$. Alors

$$S_n \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}.$$

Comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Constatons que pour $k=1$, l'intégrale de droite est généralisée mais convergente. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$,

$$\int_n^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant S_n \leqslant \int_{n-1}^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Or

$$\int_n^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_n^{2n+1} = 2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})$$
$$= 2\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\right),$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\right) = \sqrt{2}-1$, donc

$$\int_n^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$

Sur le même principe,

$$\int_{n-1}^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$

Alors, par encadrement,

$$S_n \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$

III

Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$.

. . . .

La règle de d'Alembert s'applique sans difficulté : le quotient $|u_{n+1}/u_n|$ tend vers $\frac{3}{4} \in [0,1[$ donc la série converge absolument.

IV — **CCP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = -4/n$ si n est multiple de 5 et $u_n = 1/n$ sinon. Évaluer $\sum_{k=1}^{5n} u_k$ et en déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

. . . .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} u_k$. Évaluons S_{5n} pour de petites valeurs de n. On a

$$\begin{aligned} S_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{5}{5} = \sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} S_{10} &= S_5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{4}{10} \\ &= S_5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{5}{10} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur n que

$$S_{5n} = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}.$$

On vient d'initialiser la récurrence pour $n=1$ et $n=2$. Supposons que ce soit vrai au rang n. Alors

$$\begin{aligned} S_{5n+5} &= S_{5n} + \sum_{p=1}^{4} \frac{1}{5n+p} - \frac{4}{5n+5} \\ &= S_{5n} + \sum_{p=1}^{4} \frac{1}{5n+p} + \frac{1}{5n+5} - \frac{5}{5n+5} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} + \sum_{p=1}^{5} \frac{1}{5n+p} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \sum_{k=n+2}^{5n+5} \frac{1}{k}$$

et la transmission est acquise.

Alors par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{5n} = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}.$$

2. Pour trouver la limite de (S_{5n}), effectuons une comparaison série-intégrale. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

donc en sommant pour $k \in [\![n+1, 5n]\!]$,

$$\ln\left(\frac{5n+1}{n+1}\right) = \int_{n+1}^{5n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_{5n} \leqslant \int_{n}^{5n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 5.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} S_{5n} = \ln 5$, d'après le théorème d'encadrement.

Soit maintenant un entier $N \geqslant 5$. Il s'écrit $N = 5n + r$ avec $n \geqslant 1$ et $r \in [\![0, 4]\!]$. Alors

$$S_N = S_{5n} + \sum_{k=1}^{r} u_{5n+k}.$$

Par convention, cette dernière somme est nulle si $r = 0$. Or $0 \leqslant \sum_{k=1}^{r} u_{5n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{4} u_{5n+k}$. Ce majorant est la somme de quatre termes qui tous tendent vers 0 quand n — donc N — tend vers $+\infty$, donc elle tend aussi vers 0. Ainsi, $\lim_{N\to+\infty} S_N = \ln 5$. Cela signifie que la série $\sum u_k$ converge et que sa somme est $\ln 5$.

V

Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(1+e^{-n})}$.

. . . .

Cette série diverge car $\displaystyle\frac{1}{n(1+e^{-n})} \sim \frac{1}{n}$.

VI — MP

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

. . . .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2/n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est continue, donc d'après les sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$