Exercices de colles – douzième semaine

I — **ESEM**

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{itx}\, \mathrm{d}t.$$

. . . .

En intégrant par parties,

$$\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\, e^{itx}}{i\,x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{f'(t)\, e^{itx}}{i\,x}\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{f(b)\, e^{ibx}}{i\,x} - \frac{f(a)\, e^{iax}}{i\,x} - \int_a^b \frac{f'(t)\, e^{itx}}{i\,x}\, \mathrm{d}t.$$

Comme f est continue sur $[a,b]$, elle y est bornée, disons par M_0. De même, f' est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée par M_1. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\, e^{itx}\, \mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{f(b)\, e^{ibx}}{i\,x}\right| + \left|\frac{f(a)\, e^{iax}}{i\,x}\right| + \int_a^b \left|\frac{f'(t)\, e^{itx}}{i\,x}\right| \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{2\,M_0}{x} + \frac{M_1\,(b-a)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

II — **CCP15**

On rappelle que la série harmonique alternée

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge et que sa somme vaut $-\ln(2)$.

1. Montrer qu'il existe a, b, c réels tels que

$$\frac{1}{4\,X^3 - X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{2\,X-1} + \frac{c}{2\,X+1}.$$

2. Montrer que les séries

$$\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k}\right) \text{ et } \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2\,k+1} - \frac{1}{2\,k}\right)$$

convergent et calculer leur somme.

3. Montrer que la série

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{4\,k^3 - k}$$

converge et calculer sa somme.

4. L'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{4\,x^3 - x}\, \mathrm{d}x$$

converge-t-elle ? Si oui, la calculer.

. . . .

1. Sans difficulté, par la méthode classique,

$$\frac{1}{4\,X^3 - X} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2\,X-1} + \frac{1}{2\,X+1}.$$

2. La première série converge car, pour k grand,

$$\frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k} = \frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k)} \sim \frac{1}{4\,k^2},$$

où la série de Riemann de référence $\sum 1/k^2$ converge. Sur le même principe, la seconde série converge.

Pour calculer la somme de la première, évaluons ses sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k}$$
$$= \sum_{\substack{p=1\\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p=2\\ p \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}.$$

Grâce au rappel de l'énoncé, on en conclut que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\,k-1} - \frac{1}{2\,k}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln(2).$$

De la même façon,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\,k+1} - \frac{1}{2\,k}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln(2) - 1.$$

3. La série converge car, pour k grand,

$$\frac{1}{4\,k^3 - k} \sim \frac{1}{4\,k^3},$$

où la série de Riemann $\sum 1/k^3$ converge.

Là encore, évaluons les sommes partielles. Soit $n \geqslant 2$. Avec la question 1,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4\,k^3 - k} = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{2\,k-1} + \frac{1}{2\,k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2\,k} + \frac{1}{2\,k-1}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2\,k} + \frac{1}{2\,k+1}\right).$$

Alors, puisque toutes les séries concernées convergent,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{4\,k^3 - k}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2\,k} + \frac{1}{2\,k-1}\right) + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2\,k} + \frac{1}{2\,k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2\,k} + \frac{1}{2\,k-1}\right) + \frac{1}{2} - 1$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2\,k} + \frac{1}{2\,k+1}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$= 2\ln(2) - \frac{4}{3}.$$

4. L'intégrale converge car, pour x grand,

$$\frac{1}{4\,x^3 - x} \sim \frac{1}{4\,x^3},$$

où l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \mathrm{d}x/x^3$ converge.

Commentaire. Bien-sûr, on aurait aussi pu invoquer la comparaison série-intégrale pour la fonction $x \mapsto 1/(4\,x^3 - x)$ qui est clairement continue et décroissante sur $[2,+\infty[$.

Grâce à la question 1, pour $a \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\int_2^a \frac{\mathrm{d}x}{4x^3-x} &= \int_2^a \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_2^a \frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^a \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}+\int_2^a \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} \\ &= -\ln(a)+\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(2a-1)-\frac{1}{2}\ln(3) \\ &\quad +\frac{1}{2}\ln(2a+1)-\frac{1}{2}\ln(5) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2a-1)(2a+1)}{a^2}\right)+\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(15) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(2-\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{a}\right)\right)+\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(15).\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4x^3-x} = 2\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(15).$$

III

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

....

L'égalité de l'énoncé s'écrit $\int_0^1 (f(t)-f(1))\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction $t \mapsto f(t)-f(1)$ est continue sur $[0,1]$, si son intégrale est nulle, c'est qu'elle s'annule sur $]0,1[$ (par exemple, en appliquant le théorème de Rolle à la primitive nulle en 0). Ainsi, il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = f(1)$. Et donc, toujours d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

IV — CCINP23

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i+(-1)^n)\ln(n)\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n+3}-1}$.

....

Nommons u_n le terme général. Quand n est au voisinage de $+\infty$,

$$|u_n| = \frac{\sqrt{2}\ln(n)\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n+3}-1} \sim \frac{\sqrt{2}\ln(n)\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \ll \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Or $\sum 1/n^{5/4}$ converge comme série de Riemann car $5/4 > 1$, donc $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

V

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \int_0^{1/x} t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

....

En intégrant par parties, ce qui est permis car f est de classe $\mathscr{C}^1$,

$$x^2 \int_0^{1/x} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{2}\int_0^{1/x} t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x \geqslant 1$ donc que $1/x \leqslant 1$. De plus, f' est continue sur $[0,1]$, donc elle y est bornée, disons par M. Alors,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1/x} t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^{1/x} t^2 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{1/x} t^2 M\,\mathrm{d}t = \frac{M}{3x^3}\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\left|\frac{x^2}{2}\int_0^{1/x} t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{6x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

Ainsi, comme f est continue en 0,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \int_0^{1/x} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(0).$$

VI — CCINP23

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(e-(1+\frac{1}{n})^n)\,e^{1/n}}{\ln^2(n^2+n)}$.

....

Première étape. Cherchons un équivalent du terme général u_n. Pour n grand, d'une part,

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= \exp(n\ln(1+\frac{1}{n})) \\ &= \exp(n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}(\frac{1}{n^2}))) \\ &= \exp(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n})) \\ &= e\exp(-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n})) \\ &= e(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n})),\end{aligned}$$

donc

$$e-(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{2n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n}) \sim \frac{e}{2n}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\ln(n^2+n) &= \ln(n^2(1+\frac{1}{n})) \\ &= \ln(n^2)+\ln(1+\frac{1}{n}) = 2\ln n + \mathrm{o}(1) \sim 2\ln n,\end{aligned}$$

donc $\dfrac{\ln(n^2+n)}{2\ln n} \to 1$, donc $(\dfrac{\ln(n^2+n)}{2\ln n})^2 \to 1$ et $\ln^2(n^2+n) \sim 4\ln^2 n$. Bien-sûr, $e^{1/n} \sim 1$. Alors

$$u_n \sim \frac{e}{8n\ln^2 n}.$$

Deuxième étape. Notons v_n cet équivalent et étudions la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto 1/(t\ln^2 t)$ est positive, continue et décroissante sur $[2,+\infty[$. Donc pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^n v_k \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = \frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

Commentaire. On commence la somme à $k = 3$ pour éviter la valeur 1 dans la borne inférieure de l'intégrale.

Ainsi, les sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 3} v_n$ sont majorées, donc la série converge.

Conclusion. Comme v_n est positif, u_n l'est aussi, au moins à partir d'un certain rang. Alors, par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.