

Exercices de colles – treizième semaine

I — AM

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.

.....
CONVERGENCE. L'intégrande f est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $|f(t)| \sim_0 |\ln(t)|$, et $t \mapsto |\ln(t)|$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc f aussi; $|f(t)| \ll_{+\infty} 1/t^{3/2}$, et $t \mapsto 1/t^{3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f aussi. Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

CALCUL. Comme f est intégrable sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$, et que le changement de variable est licite car bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$, les calculs suivants ont un sens : en posant $u = 1/t$,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du$$

donc $\int_0^{+\infty} f = 0$.

II — CCP

Étudier la définition, continuité et classe $\mathcal{C}^1$ de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

.....
Posons $I = \mathbb{R}_+$.

DOMAINE DE DÉFINITION. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$$h : t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

est continue et positive sur I . Si $x < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$ donc h n'est pas intégrable sur I . Si $x \geq 0$, pour tout $t \in I$, $h(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, où la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur I donc h l'est aussi. Finalement, f est définie sur $A = \mathbb{R}_+$.

CONTINUITÉ. Considérons la fonction

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

- Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur A .
- Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I .
- Pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2},$$

ce qui constitue une domination valide de g .

Alors

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I (ce que l'on savait déjà);
- la fonction f est continue sur A .

CLASSE $\mathcal{C}^1$.

- Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

- On a vu précédemment que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur I .

- Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I .

- Pour la domination, on « sent » que l'on doit s'écarter de $x = 0$. Soit $a > 0$ et soit $x \in [a, +\infty[$. Pour tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-at^2}.$$

Comme $a > 0$ et que $e^{-at^2} \ll_{+\infty} e^{-at}$, la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est continue et intégrable sur I . Donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, +\infty[\times I$.

Il s'ensuit que

- pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$;
- pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

Comme tout cela est vrai pour tout $a > 0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bien-sûr, l'expression de f' est toujours valide.

III — AM

$$\text{Calculer } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}.$$

.....
Sans autre précision de l'énoncé, considérons que $n \in \mathbb{N}$.

CONVERGENCE. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto 1/(1+x^3)^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f_0 = 1$, elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $n \geq 1$, $f_n(x) \sim_{+\infty} 1/x^{3n}$. Or $x \mapsto 1/x^{3n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $3n > 1$. Alors f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: l'intégrale converge, notons-la I_n .

CALCUL. Intégrons par parties : chaque terme du calcul suivant a un sens donc le calcul a un sens.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3nx^3 dx}{(1+x^3)^{n+1}} \\ &= 3n(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

donc $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{3n})I_n$. Par une récurrence immédiate,

$$I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3k} \right).$$

Il reste à expliciter I_1 . On décompose la fraction en éléments simples, et on trouve

$$I_1 = \frac{2}{9} \pi \sqrt{3}.$$

Voici une détermination de cette intégrale avec le module de calcul formel **sympy** de **python**.

```
>>> from sympy import *
>>> t = Symbol('t')
>>> integrate(1/(1+t**3), (t, 0, oo))
2*sqrt(3)*pi/9
```

IV

CCP

Montrer la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{itx} dt.$$

.....
 Appliquons le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. Posons $A = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_+$ et

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto e^{-t^2} e^{itx}.$$

◦ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur A et pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = ite^{-t^2} e^{itx}.$$

◦ Encore par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur I . De plus, quand $t \rightarrow +\infty$, $|g(x, t)| = e^{-t^2} \ll e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I , donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I .

◦ Toujours par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I .

◦ Enfin, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = te^{-t^2} \ll_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}.$$

Alors $t \mapsto te^{-t^2}$ est intégrable sur I et constitue une domination valide de $\frac{\partial g}{\partial x}$.

Alors, grâce au théorème évoqué,

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
- et pour tout $x \in A$,

$$f'(x) = i \int_0^{+\infty} te^{-t^2} e^{itx} dt.$$

V

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \text{Arctan}(x)/x^\alpha$.

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+^*} f_{3/2}$.

.....
 1. f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f_\alpha(x) \sim_0 1/x^{\alpha-1}$ et $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \pi/(2x^\alpha)$ donc f_α est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ et sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

2. Pour calculer l'intégrale, on intègre par parties, on pose $u = \sqrt{t}$ et on décompose en éléments simples la fraction obtenue : $\int_{\mathbb{R}_+^*} f_{3/2} = \pi\sqrt{2}$.

Voici une détermination de cette intégrale avec le module de calcul formel `sympy` de `python`.

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x')
>>> integrate(atan(x)/x/sqrt(x), (x,0,oo))
sqrt(2)*pi
```

VI

CCP

Étudier la définition et la classe $\mathcal{C}^1$ de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x t^2)}{t(1+t^2)} dt.$$

.....
 Posons $I =]0, +\infty[$.

DÉFINITION. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\ln(1+x t^2)}{t(1+t^2)}$$

est définie et continue (par morceaux) sur I , à condition que pour tout $t > 0$, $1+x t^2 > 0$, ce qui impose que $x > -\frac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$, donc $x \geq 0$.

Soit donc $x \geq 0$. Pour tout $t \in]0, 1]$,

$$|h(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{x t^2}{t} = x t$$

donc h est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. De même, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$|h(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x t^2)}{t^3} = \frac{2 \ln t + \ln x}{t^3} \ll_{+\infty} \frac{1}{t^2},$$

et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, h l'est aussi. Ainsi, h est intégrable sur I .

Finalement, f est définie sur $A = \mathbb{R}_+$.

CLASSE $\mathcal{C}^1$. Introduisons la fonction

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{\ln(1+x t^2)}{t(1+t^2)}.$$

◦ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+x t^2)(1+t^2)}.$$

◦ On a vu précédemment que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur I .

◦ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I .

◦ Pour la domination, on « voit » qu'il faut s'écarter de 0. Soit donc $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+a t^2)(1+t^2)} = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue sur I , elle est prolongeable par continuité en 0 et en $+\infty$, $\varphi(t) \sim \frac{1}{a t^3}$ donc φ est intégrable sur I et $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, +\infty[\times I$.

Alors,

- pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$;
- pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+x t^2)(1+t^2)}.$$

Comme tout cela est vrai pour tout $a > 0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'expression de f' reste valide.