Exercices de colles – quatorzième semaine

I ————— **CCP**

Étudier l'intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

.....
 Nommons f la fonction, continue sur $]1, +\infty[$.

ÉTUDE SUR $]1, 2]$. Au voisinage de 1,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1 + o(x-1)}}{(x-1)\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x-1}$ est intégrable sur $]1, 2]$, donc f l'est aussi.

ÉTUDE SUR $[2, +\infty[$. En $+\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} \ll \frac{1}{x^{4/3}}.$$

Comme $\frac{4}{3} > 1$, la fonction $x \mapsto 1/x^{4/3}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$, donc f l'est aussi.

Finalement, f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

II ————— **III**

1. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt.$$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

.....
 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$ est continue et positive sur $I = [0, +\infty[$.

Si $x < 0$, $\lim_{+\infty} h = +\infty$ donc h n'est pas intégrable sur I .

Si $x = 0$, $h(t) \sim_{+\infty} 1/\sqrt{t}$ et $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ donc h non plus.

Enfin, si $x > 0$, $h(t) \ll_{+\infty} e^{-xt/2}$ où $t \mapsto e^{-xt/2}$ est intégrable sur I car $\frac{x}{2} > 0$, donc h est intégrable sur I .

Ainsi, f est définie sur $A = \mathbb{R}_+^*$.

2. Considérons la fonction

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}.$$

○ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{1+t}}.$$

○ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur I , comme on l'a prouvé ci-dessus.

○ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I .

○ Pour tout segment $[a, b] \subset A$, avec $0 < a < b$, tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in I$, $\sqrt{1+t} \geq \sqrt{t}$ donc

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-xt} \leq \sqrt{t} e^{-at},$$

où $t \mapsto \sqrt{t} e^{-at}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur I car $\sqrt{t} e^{-at} \ll_{+\infty} e^{-at/2}$ et $a > 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, b] \times I$.

Alors

• pour tout $x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;

• la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$;

• pour tout $x \in [a, b]$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt.$$

Puisque tout cela est vrai sur tout segment $[a, b] \subset A$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A , et l'expression de f' est encore valide.

III ————— **AM**

Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}.$$

.....
 La fonction $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim -\frac{1}{\ln t} \rightarrow 0$, donc f se prolonge par continuité en 0 et elle est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$. Au voisinage de 1,

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln(1+t-1)} \sim \frac{t-1}{t-1} = 1,$$

donc f se prolonge par continuité en 1 et elle est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Ainsi, f est intégrable sur $]0, 1[$.

IV ————— **TPE**

Étudier la classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

.....
 Posons $I = \mathbb{R}_+^*$, $A = \mathbb{R}$ et

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}.$$

○ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}.$$

○ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I : en effet, quand $t \rightarrow 0$, $g(x, t) \rightarrow x$ et $t \mapsto x$ est constante donc intégrable en 0; et quand $t \rightarrow +\infty$, $|g(x, t)| \leq 1/t^3$ et $t \mapsto 1/t^3$ est intégrable en $+\infty$.

- Bien-sûr, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I .
- Enfin, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

où $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur I .

Alors,

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
- et pour tout $x \in A$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

V ————— **CCP**

Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$f : t \mapsto \exp\left(-t + \ln t \frac{\sin t}{t}\right).$$

.....
CONTINUITÉ. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

ÉTUDE SUR $]0, 1]$. Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-t} \exp(\ln t (1 + O(t^2))) \\ &= t e^{-t} \exp(O(t^2 \ln t)) \sim t, \end{aligned}$$

donc $\lim_0 f = 0$ et f est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

ÉTUDE SUR $]1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\ln t \sin t/t = o(1)$ donc $f(t) \sim e^{-t}$. Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ donc f aussi.

CONCLUSION. f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

VI ————— **CCP**

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

1. Donner son ensemble de définition.
 2. Étudier sa classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble.
-

Posons $I =]0, +\infty[$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la fonction

$$h : t \mapsto \frac{t e^{-xt}}{e^t - 1}$$

est continue sur I . De plus, $h(t) \sim_{t \rightarrow 0} 1$, donc h est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin,

$$h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t e^{-xt}}{e^t} = t e^{-(x+1)t}.$$

Si $x \leq -1$, cet équivalent tend vers $+\infty$ et h n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Mais si $x > -1$, $x+1 > 0$ donc

$$t e^{-(x+1)t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\ll} e^{-(x+1)t/2}$$

et l'on sait que $t \mapsto e^{-(x+1)t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $(x+1)/2 > 0$. Donc h est intégrable sur $[1, +\infty[$ quand $x > -1$.

Ainsi, f est définie sur $A =]-1, +\infty[$.

2. Posons

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{t e^{-xt}}{e^t - 1}.$$

○ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt}}{e^t - 1}.$$

○ On a vu précédemment que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I .

○ Par opération usuelles, pour tout $x \in A$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I .

○ Pour tout segment $[a, b] \subset A$, avec $-1 < a < b$, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{e^t - 1} = \varphi(t).$$

Clairement, φ est continue sur I ; en 0, $\varphi(t) \sim t$ et $t \mapsto t$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc φ l'est aussi; et en $+\infty$, $\varphi(t) \sim t^2 e^{-(a+1)t} \ll e^{-(a+1)t/2}$, où $t \mapsto e^{-(a+1)t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $a+1 > 0$, donc φ l'est aussi. Ainsi, $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, b] \times I$.

Alors

- pour tout $x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, b]$;
- pour tout $x \in [a, b]$,

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

Comme tout cela est vrai pour tout segment $[a, b] \subset A$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et l'expression de f' est encore valide.