Exercices de colles – quinzième semaine

I ————— CS

1. Étudier la convergence sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \cos^n(x) \sin(x)$.

2. On pose $g_n = n f_n$. Étudier la suite $(\int_0^{\pi/2} g_n)$.

3. Que dire de la suite de fonctions (g_n) ?

.....
1. Comme f_n est 2π -périodique, impaire et que pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(\pi - x) = (-1)^n f_n(x)$, menons l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

CONVERGENCE SIMPLE. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, $|\cos x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Il s'ensuit que (f_n) converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction nulle.

CONVERGENCE UNIFORME. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \geq 1$, $f'_n(x) = \cos^{n-1} x (-n \sin^2 x + \cos^2 x)$ donc

$$f'_n(x) = 0 \iff x = \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}.$$

Alors, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|f_n(x)| \leq f_n\left(\text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sin\left(\text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc (f_n) converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction nulle.

2. En posant $u = \cos x$,

$$\int_0^{\pi/2} n \cos^n x \sin x dx = n \int_0^1 u^n du = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

3. On voit sans difficulté que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mais comme $\int_0^{\pi/2} g_n \not\rightarrow 0$, (g_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

II ————— CS

1. Donner le domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt.$$

2. Déterminer f'' et en déduire f .

.....
1. Posons $I =]0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord la fonction

$$h : t \mapsto \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$$

est continue (par morceaux) sur I . De plus, $h(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^2$. L'équivalent est valide même si $x = 0$, car h est alors la fonction nulle. Alors h est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin, $|h(t)| \ll_{t \rightarrow +\infty} 1/t^2$, où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc h l'est aussi.

Finalement, h est intégrable sur I et f est définie sur $A = \mathbb{R}$.

2. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A . Introduisons la fonction

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}.$$

o Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}.$$

o On a vu précédemment que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur I .

Par opérations usuelles, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I . Et pour tout $t \in I$, $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq |x| e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I , donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ l'est aussi.

Ici, la majoration est valide sur I tout entier, donc il n'est pas nécessaire de le couper en deux pour l'intégrabilité.

o Par opération usuelles, pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I .

o Enfin, pour tout $(x, t) \in A \times I$, $|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)| \leq e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I (bis) et ne dépend pas de x , donc constitue une domination valide.

Il s'ensuit que

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A ;
- pour tout $x \in A$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt \\ &= \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt \right) = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Comme $f'(0) = 0$, $f'(x) = \text{Arctan } x$. Alors, comme $f(0) = 0$ et en intégrant par parties,

$$f(x) = x \text{Arctan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

III ————— MP

Soit $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{n f(t)}{1+n^2 t^2} dt.$$

.....
En posant $u = nt$,

$$\int_{-1}^1 \frac{n f(t)}{1+n^2 t^2} dt = \int_{-n}^n \frac{f(\frac{u}{n})}{1+u^2} du.$$

Considérons les fonctions

$$f_n : u \mapsto \begin{cases} \frac{f(\frac{u}{n})}{1+u^2} & \text{si } u \in [-n, n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elles sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On voit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2},$$

laquelle est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(u)| \leq \frac{\|f\|_{\infty}^{[-1,1]}}{1+u^2}$$

où la fonction $u \mapsto 1/(1+u^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée : les f_n et leur limite simple sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et l'on peut passer à la limite sous le signe $\int$. Comme

$$\int_{-n}^n \frac{f(\frac{u}{n})}{1+u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u) du,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{n f(t)}{1+n^2 t^2} dt \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2} du = f(0). \end{aligned}$$