Exercices de colles – seizième semaine

I — AM

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Voici deux preuves.

Preuve directe. On sait que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant 1$, donc

$$\frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\leqslant\int_0^{\pi/2}\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

et la suite tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Preuve savante. La suite des fonctions continues $f_n : x\mapsto\sqrt[n]{\sin x}$ converge simplement sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ vers la fonction constante $f : x\mapsto 1$, laquelle est évidemment continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$; et pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)|\leqslant 1$, où la fonction $x\mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Donc d'après le théorème de convergence dominée, les f_n et f sont intégrables sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ — ce qui n'est pas une surprise — et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}f_n=\int_0^{\pi/2}f=\frac{\pi}{2}.$$

II — CS15

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0. On pose

$$I=\{x\in\mathbb{R},\ \textstyle\sum u_n^x \text{ converge}\}.$$

1. Montrer que soit I est vide, soit c'est un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. On illustrera chaque cas par un exemple concret.

2. On suppose que $I\neq\varnothing$ et on pose

$$f : I\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^x.$$

Étudier la continuité de f sur I, et sa limite en $\sup I$.

1. Tout d'abord, $I\subset\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $x\leqslant 0$, comme la suite (u_n) tend vers 0 et qu'elle est strictement positive, la suite (u_n^x) ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n^x$ diverge grossièrement et $x\notin I$.

Il est possible que I soit vide. Par exemple, choisissons $u_n=1/\ln(n+1)$. Clairement la suite (u_n) remplit les conditions requises. Mais pour tout $x>0$, par croissance comparées, $(\ln(n+1))^x\ll n$ donc $u_n^x\gg 1/n$ où $\sum 1/n$ diverge, donc $\sum u_n^x$ diverge. Alors $x\notin I$ et I est bien vide.

Supposons I non vide. Soit $x\in I$: la série $\sum u_n^x$ converge. Considérons $y\geqslant x$. Comme la suite (u_n) converge vers 0 et qu'elle est strictement positive, à partir d'un certain rang, $0<u_n\leqslant 1$, donc

$$0<u_n^y\leqslant u_n^x.$$

Puisque $\sum u_n^x$ converge, $\sum u_n^y$ converge et $y\in I$.

Ainsi, pour tout $x\in I$, $[x,+\infty[\,\subset I$. Donc I est un intervalle. De plus, dans ce cas, $\sup I=+\infty$.

Voici un exemple de ce cas. Choisissons $u_n=1/(n+1)$. Avec les séries de Riemann, $\sum u_n^x$ converge si et seulement si $x>1$ et $I=\,]1,+\infty[$.

2. Continuité de f. Considérons les fonctions

$$f_n : I\to\mathbb{R},\ x\mapsto u_n^x,$$

de sorte que l'on étudie $\sum f_n$.

Bien-sûr les f_n sont continues sur I, comme fonctions exponentielles.

Soit $a\in I$. On l'a dit, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $0<u_n\leqslant 1$. Alors, pour tout $x\geqslant a$ et tout $n\geqslant N$, $0<f_n(x)\leqslant f_n(a)$. Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant N}f_n(a)$ converge — puisque $a\in I$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant N}f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc aussi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}f_n$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, on en conclut la continuité de f sur tout $[a,+\infty[$ pour $a\in I$, donc sur I.

Limite de f en $+\infty$. Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} A&=\{n\in\mathbb{N}\mid u_n>1\},\\ B&=\{n\in\mathbb{N}\mid u_n=1\}\\ \text{et } C&=\{n\in\mathbb{N}\mid 0<u_n<1\}.\end{aligned}$$

Par construction, $\mathbb{N}=A\sqcup B\sqcup C$. Comme (u_n) converge vers 0, A et B sont finis, éventuellement vides, et C est infini.

Soit $x\in I$. On peut écrire

$$f(x)=\sum_{n\in A}f_n(x)+\sum_{n\in B}f_n(x)+\sum_{n\in C}f_n(x).$$

Pour tout $n\in C$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$. Grâce à la convergence normale rencontrée plus haut et au théorème de la double limite, on peut affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\in C}f_n(x)=0.$$

Pour tout $n\in B$ et tout $x\in I$, $f_n(x)=1$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\in B}f_n(x)=\operatorname{card}(B).$$

On se rappelle que cette somme est finie, et qu'elle peut être vide, auquel cas $\operatorname{card}(B)=0$ et cette relation est encore valide.

Enfin, si $A\neq\varnothing$, considérons un $k\in A$. Alors, pour tout $x\in I$, comme les u_n sont positifs et que $u_k>1$,

$$\sum_{n\in A}f_n(x)\geqslant u_k^x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty & \text{si } A\neq\varnothing\\ \operatorname{card}(B) & \text{sinon.}\end{cases}$$

III — AM

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

....

Utilisons le théorème de convergence dominée.

∘ Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction
$$f_n : x\mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$$
est continue sur $[0,1]$.

∘ Sans difficulté, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction
$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<1,\\ \frac12 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

∘ La fonction est continue par morceaux sur $[0,1]$.

∘ Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $|f_n(x)|\leqslant 1$, où $x\mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$.

Alors,

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur $[0,1]$ — ce n'est pas une surprise ;
- et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

IV — MP

1. Considérons une suite réelle (λ_n). Trouver l'ensemble de définition de
$$f : x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda_n x}}{n^2}.$$

2. Calculer les limites en 0 et $+\infty$ de
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt.$$

....

1. Pour tout $n\geqslant 1$, considérons la fonction
$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ x\mapsto\frac{e^{i\lambda_n x}}{n^2}.$$
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|f_n(x)|=1/n^2$ et la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge car $2>1$, donc la série $\sum f_n(x)$ converge absolument donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Mieux, $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}=1/n^2$, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Et comme les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi.

2. Soit un réel $T>0$. Comme la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-T,T]$, on peut permuter :
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_n(t)\,dt.$$
Or, pour $n\in\mathbb{N}$, si $\lambda_n=0$,
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_n(t)\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{dt}{n^2}=\frac{1}{n^2},$$
et si $\lambda_n\neq 0$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_n(t)\,dt&=\frac{1}{2T}\left[\frac{e^{i\lambda_n x}}{i\lambda_n n^2}\right]_{-T}^{T}\\&=\frac{1}{2T}\,\frac{e^{i\lambda_n T}-e^{-i\lambda_n T}}{i\lambda_n n^2}=\frac{\sin(\lambda_n T)}{\lambda_n T n^2}.\end{aligned}$$
Alors, en introduisant le sinus cardinal
$$\operatorname{sinc}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}$$
on voit que pour tout n,
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_n(t)\,dt=\frac{\operatorname{sinc}(\lambda_n T)}{n^2}.$$
Ainsi,
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sinc}(\lambda_n T)}{n^2}.$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en notant $g_n : T\mapsto\operatorname{sinc}(\lambda_n T)$, on voit que $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}}=1$, donc la série de fonctions $\sum g_n/n^2$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. En outre,
$$\lim_{T\to 0}g_n(T)=1 \text{ et } \lim_{T\to+\infty}g_n(T)=\begin{cases}1 & \text{si } \lambda_n=0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
Donc d'après le théorème de la double limite, on peut permuter la somme et les limites :
$$\begin{aligned}\lim_{T\to 0}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt&=\lim_{T\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g_n(T)}{n^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{T\to 0}\frac{g_n(T)}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$
Pour formaliser la seconde limite, introduisons le support de la suite $\lambda=(\lambda_n)$:
$$\operatorname{supp}\lambda=\{n\in\mathbb{N}\mid\lambda_n\neq 0\}.$$
Alors
$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt&=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{T\to+\infty}\frac{g_n(T)}{n^2}\\&=\sum_{n\notin\operatorname{supp}\lambda}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

V — CCP

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^{\pi/2} f(x) \sin^n x \, \mathrm{d}x$ admet une limite que l'on précisera.

. . . .

Utilisons le théorème de convergence dominée.

∘ Les fonctions $g_n : x \mapsto f(x) \sin^n x$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
∘ Clairement, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

∘ La fonction g est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
∘ Enfin, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty^{[0,\pi/2]}$, où $x \mapsto \|f\|_\infty^{[0,\pi/2]}$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Alors,

- les g_n et g sont intégrables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ — ce qui n'est pas une surprise ;
- la suite (u_n) converge ;
- et l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} g(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

VI — MP

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. On note f sa somme. Est-elle continue ? dérivable ?

3. Donner ses limites en 0 et $+\infty$.

. . . .

1. Convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$, $f_n(0) = 1/(n+1) \sim_{n\to+\infty} 1/n$ et $\sum f_n(0)$ diverge. Enfin, si $x > 0$, $0 < f_n(x) < e^{-nx}$, où $\sum e^{-nx}$ converge comme série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$, donc $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$. On se doute que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. On voit que la convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$ suffit pour la suite de l'exercice.

Soient $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} \\ &= \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{e^{-(n+1)a}}{1-e^{-a}}. \end{aligned}$$

Ce dernier majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 avec n, donc (R_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction nulle, et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Commentaire. On a traité la convergence uniforme pour répondre à la question, mais la convergence normale est encore plus simple et suffit pour la suite.

2. Puisque les f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$ d'après ce qui précède, la somme f est continue sur ces intervalles. Comme $a > 0$ est arbitraire, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les f_n sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$f_n'(x) = -\frac{n e^{-nx}}{n+1}.$$

En outre, pour $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n'(x)| = \frac{n e^{-nx}}{n+1} \leqslant e^{-na}.$$

Or e^{-na} ne dépend pas de x et $\sum e^{-na}$ converge comme série géométrique de raison $e^{-a} \in [0, 1[$, donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Il s'ensuit que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall x \geqslant a, \ f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{n+1}.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$, elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Limite en $+\infty$. On a vu que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, par exemple. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Notons ℓ_n ces limites. D'après le théorème de la double limite, la série $\sum \ell_n$ converge et f admet une limite en $+\infty$ qui vaut

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

Limite en 0. On imagine que f tend vers $+\infty$ en 0. Prouvons-le.

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-kx}}{k+1} \geqslant e^{-nx} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

En choisissant $x_n = 1/n$,

$$f(x_n) \geqslant e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Comme la suite (x_n) décroit vers 0 et que f décroit sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $f' \leqslant 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$