Exercices de colles – dix-septième semaine

I — MT

Rayon de convergence de $\sum \lfloor e^n \rfloor z^n$.

. . . .

Comme $\lfloor e^n \rfloor \sim e^n$, le rayon de convergence R cherché est le même que celui de la série entière $\sum e^n z^n$, laquelle est géométrique et converge si et seulement si $|e\,z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < \frac{1}{e}$, donc $R = \frac{1}{e}$.

II — CCP

Montrer la définition et la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2\,x^2}.$$

. . . .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{1 + n^2\,x^2}.$$

Définition. Pour $x > 0$, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et f y est définie.

Continuité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2\,a^2}.$$

Or la série $\sum 1/(n^2\,a^2)$ converge et ne dépend pas de x. Alors la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et f y est continue. Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

III

Rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(2n)!\,n^{2n}}{2^n\,n!\,(3n)!}\,z^n.$$

. . . .

Sans difficulté, avec la règle de d'Alembert, $R = 27\,e^{-2}/2$.

Commentaire. Cet exercice est un contrexemple au théorème bien connu selon lequel, dans les exercices ou les problèmes, le rayon de convergence d'une série entière est toujours 1 ou $+\infty$:-)

IV — CCP

Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big) - \frac{x}{n}.$$

Si cela a un sens, on pose $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Étudier la classe $\mathscr{C}^1$ de f sur $[0,1]$.

2. Calculer $f'(1)$.

. . . .

1. ∘ Par opérations usuelles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$u_n'(x) = \frac{1}{n\,(1 + \frac{x}{n})} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n\,(n+x)}.$$

∘ Soit $x \in [0,1]$. Quand n augmente,

$$u_n(x) = \frac{x}{n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{x}{n} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Or $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge comme série de Riemann où $2 > 1$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

∘ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$|u_n'(x)| = \frac{x}{n\,(n+x)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or ce majorant ne dépend pas de x et on l'a dit, $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

Alors

- S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
- et pour tout $x \in [0,1]$,

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n\,(n+x)}.$$

2. D'après le calcul précédent,

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) = -1,$$

où l'on a reconnu une somme télescopique.

V — CCP

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n\,z^n$ où

$$a_n = \int_0^1 \Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^n \mathrm{d}t.$$

. . . .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t^2 \leqslant 1$, donc

$$t^2 \leqslant \frac{1+t^2}{2} \leqslant 1$$

d'où $$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1,$$

c'est-à-dire $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, en posant $b_n = 1/(2n+1)$ et $c_n = 1$. Alors, avec des notations évidentes, $R_b \geqslant R_a \geqslant R_c$. Or d'après le cours, $R_c = 1$ et puisque b_n est une fraction rationnelle en n, $R_b = R_c = 1$. Donc $R_a = 1$.

VI — **CCP**

1. Définition et continuité de la fonction

$$f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t}\cos(nt)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right).$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

. . . .

1. Les fonctions

$$f_n : t \mapsto e^{-t}\cos(nt)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. Soit un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $a<b$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in [a,b]$,

$$|f_n(t)| = e^{-t}\,|\cos(nt)|\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) \leqslant e^{-a}\,\frac{2}{n^2}.$$

Comme $\sum 1/n^2$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Alors la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. En particulier, les f_n et f sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 0$, $|f_n(t)| \leqslant 2\,e^{-t}/n^2$. Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n aussi. On en tire aussi que

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n^2}$$

donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge. Alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t+int}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n^2+1}.$$

Alors,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$