

Exercices de colles – dix-neuvième semaine

I

Considérons le segment $I = [0, 1]$ et l'ensemble

$$E = \{f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_I |f + f'| \text{ et } N_2(f) = \sup_I |f| + \sup_I |f'|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .

.....

1. E est un espace vectoriel car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.

2. Pour toute fonction h continue sur I , posons $\|h\|_\infty = \sup_I |h|$. Comme f , f' et $f + f'$ sont continues sur I , $N_1(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. La vérification que N_1 et N_2 sont des normes est alors immédiate. Disons que si $N_1(f) = 0$, $f + f' = 0$, mais comme $f(0) = 0$, la seule solution de cette équation différentielle est $f = 0$.

II

CCP

Considérons l'ensemble ℓ^1 des suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum u_n$ converge absolument. Pour une telle suite, posons

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|.$$

1. Montrer que ℓ^1 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent trois normes sur ℓ^1 .

.....

1. D'après le cours, si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge absolument aussi. De plus, ℓ^1 est clairement non vide. Donc c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

2. La seule difficulté par rapport aux normes usuelles définies sur $\mathbb{R}^n$, est de prouver que les trois normes sont bien définies.

La première l'est par nature, puisque ℓ^1 est l'ensemble des suites pour lesquelles la série converge absolument.

Soit $u \in \ell^1$. Comme $\sum |u_n|$ converge, la suite $(|u_n|)$ tend vers 0. Alors, à partir d'un certain rang, $u_n^2 \leq |u_n|$, donc $\sum u_n^2$ converge et $\|u\|_2$ est bien définie.

Enfin, nous venons de dire que $(|u_n|)$ tend vers 0, donc c'est une suite bornée : elle admet une borne supérieure et $\|u\|_\infty$ est bien définie.

Le reste des propriétés est une simple généralisation des normes vues en cours.

III

CCP

Pour toute matrice $X = (x_i)$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose

$$N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

1. Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X).$$

2. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \mid X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}$$

possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

3. On pose

$$\tilde{N}_\infty(A) = \sup_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}} \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)}.$$

Montrer que $\tilde{N}_\infty(A) \leq M_A$.

.....

1. Soient $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| N_\infty(X) = N_\infty(X) \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq N_\infty(X) M_A. \end{aligned}$$

Donc $\max_{1 \leq i \leq n} |(AX)_i| \leq N_\infty(X) M_A$. Ainsi,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X).$$

2. Il s'ensuit que l'ensemble de l'énoncé, évidemment non vide, est majoré (par M_A) donc il admet une borne supérieure.

3. D'après 1, pour tout $X \neq 0$ dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$\frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \leq M_A,$$

$$\text{donc} \quad \sup_{X \neq 0} \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \leq M_A,$$

$$\text{d'où} \quad \tilde{N}_\infty(A) \leq M_A.$$