Exercices de colles – deuxième semaine

I — WP

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A = 0$. Montrer que

$$\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A + I_n) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - A + I_n).$$

. . . .

Raisonnons par analyse-synthèse.

Posons $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $X \in E$.

Analyse. Supposons qu'il existe $U \in \operatorname{Ker} A$, $V \in \operatorname{Ker}(A + I_n)$ et $W \in \operatorname{Ker}(A^2 - A + I_n)$ tels que

$$X = U + V + W.$$

On a $AU = 0$, $AV = -V$ et $(A^2 - A + I_n)W = 0$, ou encore $A^2W = AW - W$. Alors

$$\begin{aligned} AX &= AU + AV + AW = -V + AW, \\ A^2X &= -AV + A^2W = V + AW - W, \\ A^3X &= AV + A^2W - AW = -V - W. \end{aligned}$$

Donc immédiatement,

$$X + A^3X = U,$$

et moins immédiatement,

$$AX - A^2X + A^3X = -3V.$$

Donc

$$\begin{aligned} W &= X - U - V \\ &= X - (X + A^3X) + \tfrac{1}{3}(AX - A^2X + A^3X) \\ &= \tfrac{1}{3}(AX - A^2X - 2A^3X). \end{aligned}$$

Synthèse. Posons

$$\begin{aligned} U &= X + A^3X, \\ V &= -\tfrac{1}{3}(AX - A^2X + A^3X), \\ W &= \tfrac{1}{3}(AX - A^2X - 2A^3X). \end{aligned}$$

À l'évidence, puisque c'est de là qu'on vient, et pour se rassurer,

$$X = U + V + W.$$

De plus, puisque $A^4 = -A$,

$$AU = AX + A^4X = AX - AX = 0$$

et $U \in \operatorname{Ker} A$.

De même,

$$\begin{aligned} AV &= -\tfrac{1}{3}(A^2X - A^3X + A^4X) \\ &= -\tfrac{1}{3}(A^2X - A^3X - AX) = -V \end{aligned}$$

et $V \in \operatorname{Ker}(A + I_3)$.

Enfin,

$$\begin{aligned} AW &= \tfrac{1}{3}(A^2X - A^3X + 2AX), \\ A^2W &= \tfrac{1}{3}(A^3X + AX + 2A^2X), \end{aligned}$$

où l'on voit que $A^2W - AW + W = 0$ et $W \in \operatorname{Ker}(A^2 - A + I_n)$, ce qui valide la synthèse.

Conclusion. D'après le raisonnement par analyse-synthèse, on obtient bien la somme directe annoncée.

II — CCP

Résoudre l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 8x^3y = x^3\cos(\sqrt{2}x^2).$$

On pourra poser $t = x^2$.

. . . .

Notations. Nommons (E) l'équation. Posons $I_1 = \mathbb{R}_-^*$, $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \{1, 2\}$. Posons encore $J = \mathbb{R}_+^*$, pour différencier deux rôles différents.

Intervalle de résolution. Puisque 0 est un singularité de (E), on résout (E) sur l'intervalle I_k. Constatons que sur I_k, toute solution de (E) est de classe $\mathscr{C}^2$.

Changement de variable. L'application $u : I_k \to J$, $x \mapsto t = x^2$ est bijective et $\mathscr{C}^2$, ainsi que sa réciproque. Alors, à toute solution y de (E) sur I_k est associée une unique fonction $z : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, définie par $z = y \circ u^{-1}$, ou encore $y = z \circ u$ préférablement.

Nouvelle équation. Soit $y : I_k \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur I_k. En notant $y = z \circ u$, on a $y' = u' \cdot z' \circ u$ et $y'' = u'' \cdot z' \circ u + u'^2 \cdot z'' \circ u$. Ainsi, pour tout $x \in I_k$, $y'(x) = 2xz'(x^2)$, $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)$ et

$$\begin{aligned} & xy''(x) - y'(x) + 8x^3y(x) = x^3\cos(\sqrt{2}x^2) \\ \iff\ & 4x^3z''(x^2) + 8x^3z(x^2) = x^3\cos(\sqrt{2}x^2). \end{aligned}$$

Comme $x \neq 0$ et que l'on a posé $t = x^2$, on peut simplifier par x^3 et l'équation

$$(E) \quad \forall x \in I_k,\quad xy''(x) - y'(x) + 8x^3y(x) = x^3\cos(\sqrt{2}x^2)$$

équivaut à l'équation

$$(L) \qquad \forall t \in J,\ z''(t) + 2z(t) = \tfrac{1}{4}\cos(\sqrt{2}t).$$

Résolution de (E) sur I_k. Sans difficulté, l'ensemble des solutions de (L) sur J est

$$\Big\{g_{\alpha,\beta} : J \to \mathbb{R},\ t \mapsto \alpha\cos(\sqrt{2}t) + \beta\sin(\sqrt{2}t) + \tfrac{\sqrt{2}}{16}t\sin(\sqrt{2}t),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\Big\{f_{k,\alpha,\beta} : I_k \to \mathbb{R},\ t \mapsto \alpha\cos(\sqrt{2}x^2) + \beta\sin(\sqrt{2}x^2) + \tfrac{\sqrt{2}}{16}x^2\sin(\sqrt{2}x^2),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

III — **CCP**

Considérons $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

1. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?

2. On suppose que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que la matrice de f dans la base canonique s'écrive

$$\begin{pmatrix} r\cos\alpha\sin\alpha & -r\cos^2\alpha \\ r\sin^2\alpha & -r\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

. . . .

1. D'après le théorème du rang,

$$2 = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = 2\dim(\operatorname{Ker} f)$$

donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.

2. Puisque $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, la matrice de f dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\cos\alpha \\ a\sin\alpha & b\sin\alpha \end{pmatrix},$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En outre, on doit avoir

$$M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos^2\alpha + b\cos\alpha\sin\alpha \\ a\cos\alpha\sin\alpha + b\sin^2\alpha \end{pmatrix} = (a\cos\alpha + b\sin\alpha)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Comme $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ ne sont pas nuls en même temps, $a\cos\alpha + b\sin\alpha = 0$. Alors $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est sur la droite de $\mathbb{R}^2$ dirigée par $\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$, donc il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$. Finalement,

$$M = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\sin\alpha & -r\cos^2\alpha \\ r\sin^2\alpha & -r\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

IV — **AM**

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x.$$

. . . .

Présentation. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : nommons-la (E). Cependant, la fonction $x \mapsto e^{-x}\ln x$ n'est définie et continue que sur $I = \mathbb{R}_+^*$. C'est donc sur I que nous menons la résolution.

Équation homogène. L'équation homogène associée est (H) $y''+2y'+y = 0$; l'équation caractéristique est (C) $r^2 + 2r + 1 = 0$, dont -1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions sur I de (H) est

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Commentaire. Bien-sûr, (H) peut se résoudre sur $\mathbb{R}$.

Solution particulière. Le second membre de (E) n'a pas la forme rencontrée en cours. Utilisons donc la méthode de variation de la constante.

Choisissons une solution sur I de (H) qui ne s'annule pas, par exemple la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Et cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $\psi(x) = \alpha(x)e^{x}$ où α est une fonction deux fois dérivable sur I. En reportant dans (E), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha''(x) = \ln x \text{ d'où } \alpha(x) = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{3}{4}x^2.$$

On a choisi arbitrairement les constantes d'intégrations nulles, car l'on cherche *une* solution particulière de (E).

Équation complète. Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\{x \mapsto x^2(\tfrac{1}{2}\ln x - \tfrac{3}{4})e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{-x}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

V — **CCP**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Considérons les formes linéaires définies pour tout $P \in E$ par

$$\varphi_0(P) = P(0),\ \varphi_1(P) = P'(0),\ \varphi_2(P) = P''(0),$$

$$\psi_1(P) = P(1),\ \psi_2(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les familles $\mathscr{B} = (\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)$ et $\mathscr{C} = (\varphi_0,\psi_1,\psi_2)$ sont des bases de $\mathfrak{L}(E,\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

. . . .

1. Comme ces familles contiennent 3 vecteurs et que $\dim \mathfrak{L}(E,\mathbb{R}) = 3$, pour montrer qu'elles sont des bases de $\mathfrak{L}(E,\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elles sont libres.

La famille $\mathscr{B}$. Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0.$$

Cela signifie que pour tout polynôme $P \in E$,

$$\lambda_0\varphi_0(P) + \lambda_1\varphi_1(P) + \lambda_2\varphi_2(P) = 0,$$

autrement dit

$$\lambda_0 P(0) + \lambda_1 P'(0) + \lambda_2 P''(0) = 0.$$

En évaluant cette relation sur les polynômes de la base canonique $(1, X, X^2)$ de E, on obtient immédiatement $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre, ce que l'on voulait.

La famille $\mathscr{C}$. Soit $(\mu_0,\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mu_0\varphi_0 + \mu_1\psi_1 + \mu_2\psi_2 = 0,$$

c'est-à-dire que pour tout $P \in E$,

$$\mu_0 P(0) + \mu_1 P(1) + \mu_2\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En évaluant toujours sur la base $(1, X, X^2)$ de E, on obtient le système

$$\begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0,\\ \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 = 0,\\ \mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 0.\end{cases}$$

Une résolution facile donne $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, donc $\mathscr{C}$ est libre.

2. La matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ contient, en colonnes, les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$.

Pour commencer, $\varphi_0 = 1\cdot\varphi_0 + 0\cdot\varphi_1 + 0\cdot\varphi_2$.

Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathfrak{L}(E,\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\psi_1 = \alpha_0\,\varphi_0 + \alpha_1\,\varphi_1 + \alpha_2\,\varphi_2,$$

donc pour tout $P \in E$,

$$\psi_1(P) = \alpha_0\,\varphi_0(P) + \alpha_1\,\varphi_1(P) + \alpha_2\,\varphi_2(P),$$

c'est-à-dire

$$P(1) = \alpha_0\,P(0) + \alpha_1\,P'(0) + \alpha_2\,P''(0).$$

En évaluant cette relation sur la base $(1, X, X^2)$ de E, on a immédiatement

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = \tfrac{1}{2}.$$

De même, $\psi_2 = \beta_0\,\varphi_0 + \beta_1\,\varphi_1 + \beta_2\,\varphi_2$, donc pour tout $P \in E$,

$$\psi_2(P) = \beta_0\,\varphi_0(P) + \beta_1\,\varphi_1(P) + \beta_2\,\varphi_2(P),$$

ou encore

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \beta_0\,P(0) + \beta_1\,P'(0) + \beta_2\,P''(0).$$

En évaluant en $(1, X, X^2)$,

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = \tfrac{1}{2} \text{ et } \beta_2 = \tfrac{1}{6}.$$

Alors, la matrice de passage cherchée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

VI — CCP

Sur $]1, +\infty[$, résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{x}{(x-1)^2}\,e^{-2x}.$$

. . . .

Présentation. Nommons (E) cette équation. Sur $I =]1, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto 4$ et $x \mapsto x\,e^{-2x}/(x-1)^2$ sont continues.

Équation homogène. L'équation caractéristique est (C) $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui admet -2 comme racine double. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est donc

$$\{x \mapsto (\alpha\,x + \beta)\,e^{-2x},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Solution particulière. Utilisons la méthode de variation de la constante. Puisque $x \mapsto e^{-2x}$ est une solution sur I de (H) qui ne s'annule jamais, cherchons une solution particulière sur I de (E) sous la forme $y : x \mapsto \alpha(x)\,e^{-2x}$ où α est une fonction deux fois dérivable. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned}\alpha''(x) &= \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution particulière de (E), intégrons en choisissant arbitrairement des constantes d'intégration nulles :

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \ln(x-1) - \frac{1}{x-1},\\ \alpha(x) &= (x-1)\ln(x-1) - (x-1) - \ln(x-1)\\ &= (x-2)\ln(x-1) - x + 1.\end{aligned}$$

Donc une solution particulière sur I de (E) est

$$x \mapsto (x-2)\ln(x-1)\,e^{-2x} + (-x+1)\,e^{-2x}.$$

Et comme $x \mapsto (-x+1)e^{-2x}$ est solution sur I de (H), $x \mapsto (x-2)\ln(x-1)\,e^{-2x}$ est aussi une solution particulière sur I de (E).

Conclusion. Ainsi, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\big\{x \mapsto (x-2)\ln(x-1)\,e^{-2x} + (\alpha\,x + \beta)\,e^{-2x},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$