Exercices de colles – vingtième semaine

I ————— **CCP16**

Considérons l'espace $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt.$$

Introduisons les sous-ensembles suivants de E :

$$\begin{aligned} A &= \{f \in E \mid f'' = f\}, \\ B &= \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}, \\ H &= \{f \in E \mid f(0) = \text{ch}(1), f(1) = 1\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que (ch, sh) est une base de A .

2. a. Montrer que

$$\forall f \in A, \forall g \in E, \langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0).$$

b. Calculer $\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle$, $\|\text{ch}\|^2$ et $\|\text{sh}\|^2$.

c. Montrer que

$$\forall f \in A, \forall g \in B, \langle f, g \rangle = 0.$$

3. Soit $f \in H$

a. Calculer $\langle f, \text{ch} \rangle$ et $\langle f, \text{sh} \rangle$.

b. Donner les coordonnées dans la base (ch, sh) du projeté orthogonal de f sur A .

4. Calculer $\inf_{f \in H} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt$.

1. D'après le cours, A est un plan vectoriel, comme ensemble des solutions sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, qui est homogène d'ordre 2.

En outre, clairement $\text{ch} \in A$ et $\text{sh} \in A$.

Enfin, Si $\alpha \text{ch} + \beta \text{sh} = 0$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors, en évaluant en 0 cette relation et sa dérivée, on a $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$.

Ainsi, (ch, sh) est une famille libre contenant deux vecteurs dans le plan A , c'est donc une base de A .

2.a. Soient $f \in A$ et $g \in E$. On voit que

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 (fg + f'g') = \int_0^1 (f''g + f'g') \\ &= \int_0^1 (f'g)' = [f'g]_0^1 = f'(1)g(1) - f'(0)g(0). \end{aligned}$$

2.b. En appliquant trois fois ce résultat, sachant que ch et sh sont dans A , on a

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}, \text{sh} \rangle &= \text{ch}'(1)\text{sh}(1) - \text{ch}'(0)\text{sh}(0) = \text{sh}^2(1), \\ \|\text{ch}\|^2 &= \text{ch}'(1)\text{ch}(1) - \text{ch}'(0)\text{ch}(0) = \text{ch}(1)\text{sh}(1), \\ \|\text{sh}\|^2 &= \text{sh}'(1)\text{sh}(1) - \text{sh}'(0)\text{sh}(0) = \text{ch}(1)\text{sh}(1). \end{aligned}$$

2.c. De même, pour $f \in A$ et $g \in B$, sachant que $g(0) = g(1) = 0$,

$$\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0) = 0.$$

3.a. Toujours avec la relation de la question 2.a, pour $f \in H$ et puisque $f(0) = \text{ch}(1)$ et $f(1) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \langle f, \text{ch} \rangle &= \text{ch}'(1)f(1) - \text{ch}'(0)f(0) = \text{sh}(1), \\ \langle f, \text{sh} \rangle &= \text{sh}'(1)f(1) - \text{sh}'(0)f(0) = 0. \end{aligned}$$

3.b. On pourrait chercher une base orthonormée de A , éventuellement avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, mais c'est fastidieux. Alors procédons autrement.

On cherche $p = \alpha \text{ch} + \beta \text{sh} \in A$, le projeté orthogonal de f sur A . Alors, $f - p \perp A$. Donc $\langle f - p, \text{ch} \rangle = \langle f - p, \text{sh} \rangle = 0$ puisque (ch, sh) est une base de A , d'où

$$\begin{aligned} \langle p, \text{ch} \rangle &= \langle f, \text{ch} \rangle = \text{sh}(1), \\ \langle p, \text{sh} \rangle &= \langle f, \text{sh} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $p = \alpha \text{ch} + \beta \text{sh}$,

$$\begin{aligned} \langle p, \text{ch} \rangle &= \alpha \langle \text{ch}, \text{ch} \rangle + \beta \langle \text{sh}, \text{ch} \rangle \\ &= \alpha \text{ch}(1)\text{sh}(1) + \beta \text{sh}^2(1) = \text{sh}(1), \\ \langle p, \text{sh} \rangle &= \alpha \langle \text{ch}, \text{sh} \rangle + \beta \langle \text{sh}, \text{sh} \rangle \\ &= \alpha \text{sh}^2(1) + \beta \text{ch}(1)\text{sh}(1) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha \text{ch}(1) + \beta \text{sh}(1) = 1, \\ \alpha \text{sh}(1) + \beta \text{ch}(1) = 0, \end{cases}$$

d'où, facilement, $\alpha = \text{ch}(1)$ et $\beta = -\text{sh}(1)$. Finalement, le projeté orthogonal de f sur A est

$$p = \text{ch}(1)\text{ch} - \text{sh}(1)\text{sh} : x \mapsto \text{ch}(x - 1).$$

En passant, toutes les fonctions de H se projettent sur la même fonction p de A . Constatons de plus que $p(0) = \text{ch}(1)$ et $p(1) = 1$, donc $p \in H$.

4. Bien-sûr, la borne inférieure proposée existe bien, car les nombres considérés sont tous positifs. De plus, pour $f \in H$, on reconnaît que

$$\int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt = \|f\|^2 \geq \|p\|^2,$$

d'après l'inégalité de Bessel, sachant que p est le projeté orthogonal de f sur A . Autrement dit, $\|p\|^2$ est un minortant de $\|f\|^2$ pour tout $f \in H$, et il est atteint pour $f = p$, ce qui est possible puisque $p \in H$. Donc la borne inférieure est atteinte et elle vaut

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \|\text{ch}(1)\text{ch} - \text{sh}(1)\text{sh}\|^2 \\ &= \text{ch}^2(1)\|\text{ch}\|^2 + \text{sh}^2(1)\|\text{sh}\|^2 \\ &\quad - 2\text{ch}(1)\text{sh}(1)\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle \\ &= \text{ch}^2(1)\text{ch}(1)\text{sh}(1) + \text{sh}^2(1)\text{ch}(1)\text{sh}(1) \\ &\quad - 2\text{ch}(1)\text{sh}(1)\text{sh}^2(1) \\ &= \text{ch}(1)\text{sh}(1). \end{aligned}$$

II ————— **CS**

Considérons $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire en posant

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

2. Donner une base orthonormée de l'ensemble

$$F = \{t \mapsto at + bt^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Déterminer le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise

$$\int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt.$$

.....

1. Voir le cours :-)

2. On a $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto t^2$. Pour trouver une base orthonormée de F , il suffit d'appliquer le procédé de Schmidt à la base (f_1, f_2) . Posons

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = t \mapsto \sqrt{3}t,$$

puis posons

$$g_2 = \frac{f_2 - (f_2|g_1)g_1}{\sqrt{\|f_2\|^2 - (f_2|g_1)^2}} = t \mapsto 4\sqrt{5}(t^2 - \frac{3}{4}t).$$

La base (g_1, g_2) est une base orthonormée de F .

3. L'espace F est de dimension finie, donc la projection orthogonale sur F est bien définie dans E . En particulier, le projeté orthogonal de la fonction 1 sur F est la fonction

$$p = (g_1|1)g_1 + (g_2|1)g_2 = t \mapsto 4t - \frac{10}{3}t^2.$$

Alors, la borne inférieure cherchée s'interprète comme la distance au carré de 1 à F , et elle vaut

$$\|1 - p\|^2 = \int_0^1 (1 - p(t))^2 dt.$$

Alors le couple cherché est $(a, b) = (-4, \frac{10}{3})$.

III ————— **CCP**

1. Soient des réels $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

2. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$ est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension et son orthogonal.

3. Donner la distance de X^n à F .

.....

1. Le caractère bilinéaire, symétrique et positif de $(\cdot|\cdot)$ ne pose pas de difficulté. Soit P tel que

$$(P|P) = \sum_{k=0}^n (P(a_k))^2 = 0.$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_k) = 0$. Comme les a_k sont distincts deux à deux, $P = 0$, car il est de degré au plus n et possède $n + 1$ racines. Alors, $(\cdot|\cdot)$ est défini positif, donc c'est un produit scalaire.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$: clairement, $P \in F$ si et seulement si $\sum_{k=0}^n 1 \cdot P(a_k) = 0$, c'est-à-dire $(1|P) = 0$, donc $F = \text{Ker}(1|\cdot)$ où la forme linéaire $(1|\cdot)$ n'est pas nulle. Donc F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$: c'est un sous-espace vectoriel, de dimension n . Enfin, on vient de voir que $1 \perp F$ donc $F^\perp = \mathbb{R}1 = \mathbb{R}_0[X]$.

3. Alors, la distance de X^n à F est la norme de son projeté orthogonal U sur $F^\perp$. On a

$$U = \frac{(X^n|1)}{(1|1)}1 = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k^n \right)1,$$

d'où, comme $\|1\| = \sqrt{n+1}$,

$$d(X^n, F) = \|U\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n a_k^n \right|.$$