

Exercices de colles – vingt-et-unième semaine

I ————— CCP

Que dire de la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$?

.....
 Nommons C_1, C_2 et C_3 ses colonnes. Dans $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ euclidien orienté usuel, on voit que $C_1 \cdot C_2 = C_1^\top C_2 = 0$, que $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = 1$ et que $C_1 \wedge C_2 = C_3$. Donc la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée directe de E et $A \in SO(3)$. Ainsi, A est la matrice d'une rotation de E .

Pour trouver l'axe de la rotation, résolvons

$$AX = X \iff \begin{cases} 2x + 6y + 3z = 7x \\ 6x - 3y + 2z = 7y \\ 3x + 2y - 6z = 7z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2z, \\ x = 3z. \end{cases}$$

Donc l'axe de la rotation est la droite $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, trouvons l'angle θ de la rotation avec la trace de A : $\text{Tr}(A) = -1 = 1 + 2\cos(\theta)$, donc $\theta = \pi$.

Commentaire. On aurait aussi pu dire que $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, donc elle est diagonalisable. Comme elle n'est clairement pas I_3 , ses valeurs propres sont 1, qui est simple, et -1 qui est double, donc $\theta = \pi$.

II ————— CCP16

Soient E un espace euclidien et $a \in E \setminus \{0\}$. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $u : x \mapsto \alpha(x|a)a - x$ soit une isométrie.

.....
 D'abord, u est bien linéaire. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \|\alpha(x|a)a - x\|^2 \\ &= \alpha^2(x|a)^2\|a\|^2 - 2\alpha(x|a)(x|a) + \|x\|^2 \\ &= \alpha(\alpha\|a\|^2 - 2)(x|a)^2 + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2/\|a\|^2$, ce qui est possible car $a \neq 0$ donc $\|a\| \neq 0$, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ et u est une isométrie.

Si u est une isométrie, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$; en particulier, pour $x = a$, $\alpha(\alpha\|a\|^2 - 2)(a|a)^2 = 0$ d'où $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2/\|a\|^2$.

III ————— CCP

Soient A une matrice réelle carrée et $B = AA^\top - A^\top A$. Montrer que si les valeurs propres de B sont toutes réelles et positives, alors $B = 0$.

.....
 On voit que $B^\top = B$ et $\text{Tr}(B) = 0$. Alors B est symétrique réelle, donc diagonalisable. En particulier, la trace de B est la somme de ses valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités :

$$\text{Tr}(B) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} m(\lambda)\lambda = 0.$$

Mais comme ces valeurs propres sont réelles positives, elles sont nulles. Alors B est semblable à la matrice nulle, donc $B = 0$.

IV ————— MT18

Déterminer a, b, c, d, e, f pour que

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -2 & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

soit la matrice d'une rotation, dont on donnera les éléments caractéristiques.

.....
 Dire que $A \in SO(3)$ signifie que $AA^\top = I_3$ et $\det(A) = 1$. Mais pour les calculs, il est plus commode de dire que ses colonnes C_1, C_2 et C_3 forment une base orthonormée directe de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Commençons par $\|C_1\|^2 = 1$. Alors

$$\frac{1}{9}(1 + 4 + d^2) = 1$$

d'où $d^2 = 4$ et $d \in \{-2, 2\}$.

Ensuite, $\|C_2\|^2 = 1$ et $C_1 \cdot C_2 = 0$. Alors

$$\begin{cases} b^2 + e^2 = 5, \\ 2 - 2b + de = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire $de = 2(b - 1)$, d'où $e^2 = (b - 1)^2$ car $d^2 = 4$. En reportant dans la première équation, $b^2 - b = 2$, d'où $b \in \{-1, 2\}$.

Il en résulte quatre matrices, selon les valeurs possibles pour d et b , et alors la valeur de e est déterminée par $de = 2(b - 1)$. Dans tous les cas, la dernière colonne est donnée par le produit vectoriel $C_3 = C_1 \wedge C_2$. Les matrices sont

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Déterminons l'axe et l'angle de la première rotation. L'axe est la droite $E_1(A_1)$. On « voit » que

$$C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète en

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$E_1(A_1) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'angle θ_1 vérifie $\text{Tr}(A_1) = 1 + 2 \cos(\theta_1)$, donc

$$\theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Avec la même démarche,

$$E_1(A_2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$E_1(A_3) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_3 = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right),$$

$$E_1(A_4) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_4 = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

V ————— **CCP16**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormale B est

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est orthogonale. Calculer $\det(M)$.
2. Qu'en déduire pour f ? Interpréter f géométriquement.

.....

1. Clairement, $M^\top M = I_3$ et $\det(M) = 1$.
2. Alors f est une rotation et $E_1(M)$ est une droite. Sans difficulté,

$$E_1(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, si θ est l'angle de la rotation,

$$\text{Tr}(M) = -\frac{2}{3} = 1 + 2 \cos(\theta),$$

$$\text{donc } \theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right).$$

VI ————— **CCP16**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A = B^\top B.$$

.....

CONDITION NÉCESSAIRE. Supposons que A soit symétrique positives. Alors $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et il existe $\Omega \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = \Omega D \Omega^\top$, où les $\lambda_i \geq 0$ sont les valeurs propres de A , non nécessairement distinctes. Introduisons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Comme $\Omega^\top \Omega = I_n$, on peut écrire

$$A = \Omega D \Omega^\top = \Omega \Delta^2 \Omega^\top = \Omega \Delta \Omega^\top \Omega \Delta \Omega^\top = B^\top B,$$

en posant $B = \Omega \Delta \Omega^\top$. En passant, ici, $B^\top = B$, et l'on a en fait prouvé qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B = B^2$.

CONDITION SUFFISANTE. Supposons que l'on ait $A = B^\top B$, où $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. D'une part, $A^\top = A$ et A est symétrique réelle. D'autre part, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top A X = X^\top B^\top B X = (B X)^\top B X = \|B X\|^2 \geq 0,$$

donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.