Exercices de colles – vingt-deuxième semaine

I ————— CCP17

1. Montrer que $f(x, y) = x^2 + \ln(4 + y^2)$ admet un unique point critique.
2. Déterminer un développement limité de f en $(0, 0)$ à l'ordre 2.
3. f admet-elle des extrémums locaux ?
.....

1. Tout d'abord, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour trouver les points critiques de f résolvons le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ \frac{2y}{4 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Alors f n'a qu'un point critique, le point $(0, 0)$.

2. Pour (x, y) proche de $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + \ln 4 + \ln(1 + \frac{1}{4}y^2) \\ &= 2 \ln 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2 + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

3. Pour (x, y) proche de $(0, 0)$, le signe de $f(x, y) - f(0, 0)$ est celui de $x^2 + \frac{1}{4}y^2$ car $o(x^2 + y^2)$ est négligeable devant ce terme. Et ce terme est positif, donc $f(x, y) \geq f(0, 0)$ et $(0, 0)$ est un minimum local.

D'après le cours, si f admet un extrémum sur $\mathbb{R}^2$, qui est ouvert, cet extrémum doit être un point critique. Or l'unique point critique est bien un extrémum. Donc f n'a qu'un extrémum, le point $(0, 0)$ précédent. De plus, c'est donc un extrémum global.

II ————— CCP17

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $GL_n(\mathbb{C})$ et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que N est inversible et calculer N^{-1} .
2. Calculer N^2 , puis $P(N^2)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.
3. Si N est diagonalisable, A et B le sont-elles ? Étudier la réciproque.
.....

1. En considérant quatre matrices carrées C, D, E et F , calculons par blocs :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} BD & BF \\ AC & AE \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme A et B sont inversibles, en choisissant $C = F = 0, D = B^{-1}$ et $E = A^{-1}$, on voit que

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que N est inversible et

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sans difficulté,

$$N^2 = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}.$$

Comme il s'agit d'une matrice diagonale par blocs, en calculant par blocs, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0 \\ 0 & P(AB) \end{pmatrix}.$$

3. Supposons que N soit diagonalisable. Alors N^2 l'est et elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, lequel est aussi annulateur de BA et AB , qui sont donc diagonalisables.

Malheureusement, A et B ne le sont pas forcément. Par exemple, prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$BA = AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

qui sont bien diagonalisables. Mais A et B ne le sont pas, sinon elles seraient semblables respectivement à I_2 et $2I_2$, donc elles seraient égales à I_2 et $2I_2$.

Réciproquement, supposons que BA soit diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $BA = PDP^{-1}$. Alors, en multipliant à gauche par B^{-1} et à droite par B ,

$$\begin{aligned} AB &= B^{-1}BAB = B^{-1}PDP^{-1}B \\ &= (B^{-1}P)D(B^{-1}P)^{-1} \end{aligned}$$

et AB est aussi diagonalisable. Inversement, si AB est diagonalisable, BA l'est aussi, avec la même matrice diagonale. Ainsi, on peut écrire $BA = PDP^{-1}$ et $AB = QDQ^{-1}$, où $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors, en calculant par blocs,

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0 \\ 0 & QDQ^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on voit que la matrice médiane est diagonale, et que les matrices extrêmes sont inverses l'une de l'autre ; donc N^2 est diagonalisable. Alors, le polynôme

$$\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(N^2)} (X - \lambda)$$

est scindé à racines simples et annulateur de N^2 . Comme N est inversible, N^2 l'est, donc $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(N^2)$. Alors, tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(N^2)$ admet exactement deux racines carrées, μ et $-\mu$, et l'on peut écrire

$$N^2 - \lambda I_{2n} = (N - \mu I_{2n})(N + \mu I_{2n}).$$

Comme les λ sont distincts, les μ et $-\mu$ le sont, et le polynôme

$$\prod_{\substack{\mu^2 = \lambda \\ \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(N^2)}} ((X - \mu)(X + \mu))$$

est annulateur de N , scindé à racines simples, donc N est diagonalisable.

Là encore, si A et B sont diagonalisables, BA ne l'est pas forcément, comme on peut le voir en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A et B sont diagonalisables, car leurs valeurs propres sont distinctes, que l'on lit sur leurs diagonales. Mais BA n'est pas diagonalisable, sinon elle serait semblable, donc égale, à $2I_2$.

CONCLUSION. On a montré que N est diagonalisable si et seulement si BA l'est.

Et on a montré que le caractère diagonalisable de A et B est indépendant de celui de BA .

Commentaire. Je ne sais pas s'il était vraiment question de faire tout ça le jour de l'oral...

III _____ CCP

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Est-elle inversible? diagonalisable?

.....
Si $a = 0$, $\text{rg}(A) = 2$ donc A n'est pas inversible. De plus, elle diagonale.

Si $a \neq 0$, $\text{rg}(A) = 3$ et A est inversible. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont 1, 2 et a .

Si $a \notin \{1, 2\}$, A est diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes.

Si $a \in \{1, 2\}$, les valeurs propres de A sont 1 et 2, et l'une est double. A sera diagonalisable si et seulement si $(A - I_3)(A - 2I_3) = 0$. Or, en laissant a pour traiter les deux calculs simultanément,

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a(a-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}.$$

Donc A est diagonalisable si $a = 2$, mais pas si $a = 1$.

IV _____ CCP

Considérons la suite définie par $u_0 \geq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Déterminer les limites des suites (u_n) et (nu_n) .

2. Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

.....

1. On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, par une récurrence immédiate. Alors, $0 \leq u_n = e^{-u_{n-1}}/n \leq 1/n$ et la suite (u_n) tend vers 0. Il s'ensuit que la suite (nu_n) tend vers 1 car $nu_n = e^{-u_{n-1}}$.

2. En passant, $u_n \sim 1/n$ et $\sum u_n$ diverge. En outre, $u_{n-1} \sim 1/(n-1) \sim 1/n$ et

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum (-1)^n/n$ converge, d'après le critère spécial des séries alternées, et $\sum O(1/n^2)$ converge absolument. Alors, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

V _____ CCP

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction $f_\alpha : x \mapsto (-\ln x)^\alpha$.

.....

CONTINUITÉ. La fonction f_α est continue sur $]0, 1[$.

ÉTUDE SUR $]0, \frac{1}{2}[$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} (-\ln x)^\alpha = 0$, donc $f(x) \ll_{x \rightarrow 0} 1/\sqrt{x}$. Or la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}[$ donc la fonction f aussi.

ÉTUDE SUR $[\frac{1}{2}, 1[$. Pour x proche de 1,

$$f(x) \sim (1-x)^\alpha = \frac{1}{(1-x)^{-\alpha}}.$$

Or la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{-\alpha}$ est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$ si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$. Donc il en est de même pour f .

CONCLUSION. La fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

VI _____ CCP

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, considérons un endomorphisme f tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

.....

D'après le théorème du rang, on a déjà $\dim E = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$ donc il reste à prouver, par exemple, que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f : f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. D'une part, par hypothèse, $f(y) + f^4(y) = 0$. D'autre part,

$$f^4(y) = f^3(f(y)) = f^3(x) = f^2(f(x)) = f(0) = 0.$$

Donc $f(y) = -f^4(y) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Ainsi, $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ et l'on a bien $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.