Exercices de colles – troisième semaine

I

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

....

En commençant par la première et jusqu'à l'avant-dernière, à chaque colonne, on soustrait la suivante : le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} -1 & & (1) & n \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & 2 \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

II **AM**

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n de deux manières différentes, où

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

....

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Première façon. On peut écrire $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$ où J est la matrice remplie de 1. Clairement, $J^2 = 3\,J$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}\,J$. Comme I_3 et J commutent,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} J^k \\ &= \frac{1}{4^n}\left(I_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} 3^{k-1}\,J\right) \\ &= \frac{1}{4^n}\,I_3 + \frac{1}{3\cdot 4^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 3^k - 1\right)J \\ &= \frac{1}{4^n}\,I_3 + \frac{((1+3)^n - 1)}{3\cdot 4^n}\,J \\ &= \frac{1}{4^n}\,I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)J. \end{aligned}$$

Deuxième façon. Calculons :

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\,A - \frac{1}{4}\,I_3.$$

Ainsi, le polynôme $P = X^2 - \frac{5}{4}\,X + \frac{1}{4}$ est annulateur de A. D'après la division euclidienne, il existe d'uniques $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(*) \qquad X^n = P\,Q_n + a_n\,X + b_n.$$

En évaluant $(*)$ en les racines 1 et $\frac{1}{4}$ de P, on a

$$\begin{cases} 1^n = a_n + b_n, \\ \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4}\,a_n + b_n, \end{cases}$$

d'où

$$a_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \text{ et } b_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4}\right).$$

En évaluant $(*)$ en A, on obtient finalement

$$A^n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)A + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4}\right)I_3.$$

III

Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{K}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

....

Le déterminant est de taille $n+1$. Pour j décroissant de $n+1$ à 2, faisons $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$. Le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_1 - b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & \ldots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - b_i).$$

IV **CCP**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3 = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide de I_3, A et A^2.

....

Le polynôme

$$P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X+2)(X-1)(X-3)$$

est annulateur de A.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de X^k par P : il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $R_k \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^k = Q_k\,P + R_k$ $(*)$. En évaluant cette égalité en les racines de P, -2, 1 et 3, on obtient $R_k(-2) = (-2)^k$, $R_k(1) = 1^k = 1$ et $R_k(3) = 3^k$. En écrivant $R_k = a_k X^2 + b_k X + c_k$, où $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$, on trouve sans difficulté :-)

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{15}(-2)^k - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10}3^k, \\ b_k &= -\tfrac{4}{15}(-2)^k + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10}3^k, \\ c_k &= \tfrac{1}{5}(-2)^k + 1 - \tfrac{1}{5}3^k. \end{aligned}$$

Enfin, en évaluant $(*)$ en A, on obtient

$$\begin{aligned} A^k = R_k(A) &= a_k A^2 + b_k A + c_k I_3 \\ &= \left(\tfrac{1}{15}(-2)^k - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} 3^k\right) A^2 \\ &\quad + \left(-\tfrac{4}{15}(-2)^k + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} 3^k\right) A \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{5}(-2)^k + 1 - \tfrac{1}{5} 3^k\right) I_3. \end{aligned}$$

V

Calculer $\det(A)$ où $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifie $a_{ii} = a$, $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{ij} = 0$ sinon, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

. . . .

Le déterminant est

$$\begin{vmatrix} a & & (0) & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ (0) & & \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} & & (0) \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & (0) & & a \end{vmatrix}_{2n}.$$

Faisons $C_j \leftarrow C_j + C_{2n-j+1}$ pour $j \in [\![1,n]\!]$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_{2n-i+1}$ pour $i \in [\![n+1,2n]\!]$. Alors le déterminant devient triangulaire et vaut $(a^2-b^2)^n$.

VI MP

Inverser la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

. . . .

Sans difficulté, par exemple avec la méthode de Gauss-Jordan, on trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$