Exercices de colles – quatrième semaine

I — **CCP**

Soit l'application f définie sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ par

$$f(M) = M + \operatorname{Tr}(M)\, I_2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
Donner son noyau et son rang.

2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Trouver un polynôme annulateur de f de degré 2.

4. L'application f est-elle inversible ?
Si oui, donner f^{-1}.

. . . .

1. Posons $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

Pour toute matrice M, $f(M)$ est clairement une matrice. De plus, par linéarité de la trace, f est aussi linéaire, donc c'est bien un endomorphisme de E.

Soit $M \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $M = -\operatorname{Tr}(M)\, I_2$ donc $\operatorname{Tr}(M) = -2\operatorname{Tr}(M)$ d'où $\operatorname{Tr}(M) = 0$ et $M = 0$. Comme $0 \in \operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

D'après le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4.$$

2. Notons $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la base canonique de E, avec

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E_1 + E_4,$$
$$f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$
$$f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3$$
$$f(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = E_1 + 2E_4.$$

Donc

$$A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On a facilement

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 4A - 3I_4,$$

donc $f^2 - 4f + 3\operatorname{id}_E = 0$ et $X^2 - 4X + 3$ est annulateur de f.

4. Alors on peut écrire

$$(f - 4\operatorname{id}_E) \circ f = -3\operatorname{id}_E$$

ou encore

$$\tfrac{1}{3}(4\operatorname{id}_E - f) \circ f = \operatorname{id}_E,$$

d'où l'on tire que f est inversible et que

$$f^{-1} = \tfrac{1}{3}(4\operatorname{id}_E - f).$$

Ainsi, pour tout $M \in E$,

$$f^{-1}(M) = M - \tfrac{1}{3}\operatorname{Tr}(M)\, I_2.$$

II

Une maladie rare affecte une personne sur 10 000. Un test détecte la maladie chez un malade avec une fiabilité de 99%. Malheureusement, ce même test se révèle positif pour une personne saine dans un cas sur 1 000. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade quand son test est positif ?

. . . .

Considérons les évènements
- M : « la personne est malade »,
- T : « le test est positif ».

D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P(M \mid T) &= \frac{P(T \mid M)\, P(M)}{P(T \mid M)\, P(M) + P(T \mid \overline{M})\, P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}99 \cdot 10^{-4}}{0{,}99 \cdot 10^{-4} + 10^{-3}(1 - 10^{-4})} \\ &\approx 0{,}09. \end{aligned}$$

Commentaire. À l'inverse,

$$P(\overline{M} \mid T) = 1 - P(M \mid T) \approx 0{,}91.$$

Cela signifie que le test systématique de la population ne serait pas efficace, puisqu'une écrasante majorité des personnes révélées par le test seraient en réalité saines. Autrement dit, le test n'est pas assez fiable par rapport à la rareté de la maladie.

III — **CCP16**

On considère une famille $(f_1,\dots,f_p)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

— $\sum_{i=1}^p f_i = \mathrm{id}_E$;

— $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2,\ i\neq j \Longrightarrow f_i\circ f_j = 0$.

Montrer que les f_i sont des projecteurs de E et que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i).$$

. . . .

Montrons que les f_i sont des projecteurs de E.

Soit $j\in[\![1,p]\!]$. En composant la première relation par f_j, on a $(\sum_{i=1}^p f_i)\circ f_j = \mathrm{id}_E \circ f_j$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p f_i\circ f_j = f_j$. Grâce à la seconde relation, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ tel que $i\neq j$, $f_i\circ f_j=0$, donc il reste $f_j\circ f_j = f_j$, ce qui signifie que f_j est un projecteur de E.

Montrons que $E=\sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

Bien entendu, $\sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)\subset E$ puisque les $\mathrm{Im}(f_i)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Et en évaluant la première relation en un $x\in E$ quelconque, $\sum_{i=1}^p f_i(x) = x$, où pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $f_i(x)\in \mathrm{Im}(f_i)$. Cela signifie que $x\in\sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$. Donc $E\subset \sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

Alors, $E=\sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

Montrons que la somme est directe.

Pour cela, montrons que 0 n'y admet que la décomposition triviale. Supposons que l'on ait $0=\sum_{i=1}^p x_i$, où $x_i\in\mathrm{Im}(f_i)$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$. Comme f_i est un projecteur de E, $x_i = f_i(x_i)$. Alors, pour $j\in[\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned}0 &= f_j(0) = f_j(\textstyle\sum_{i=1}^p x_i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p f_j(x_i) = \sum_{i=1}^p f_j\circ f_i(x_i)\\ &= f_j\circ f_j(x_j) = f_j(x_j) = x_j.\end{aligned}$$

Ainsi, dans la décomposition $0=\sum_{i=1}^p x_i$, les x_i sont tous nuls, donc 0 n'admet que la décomposition triviale, et la somme est directe.

Finalement, $E=\bigoplus_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

IV

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée.

1. Déterminer les probabilités des évènements

A_1 : « la première boule tirée est la boule n^o 1 » ;

A_2 : « la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1 » ;

A_3 : « la première boule tirée est une boule bleue ».

2. Déterminer la probabilité de l'évènement

A_0 : « la boule n° 1 n'est jamais tirée lors du jeu ».

. . . .

1. En dénombrant les boules, on a

$$P(A_1)=\frac{1}{n+k},\ P(A_2)=\frac{n-1}{n+k},\ P(A_3)=\frac{k}{n+k}.$$

2. Voici deux approches.

Version longue. Quand le jeu s'arrête, c'est qu'on tire une boule bleue. Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, considérons l'évènement B_i : « on tire la boule bleue lors du tirage numéro i ». La famille $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements donc on peut écrire la formule des probabilités totales :

$$P(A_0)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_0\,|\,B_i)\,P(B_i).$$

Constatons que cette série converge d'après le cours. D'une part, puisque les tirages se font avec remise, le tirage numéro i est identique au premier tirage, donc

$$P(B_i)=P(A_3)=\frac{k}{n+k}.$$

D'autre part, l'évènement $A_0\,|\,B_i$ signifie que lors des $i-1$ premiers tirages, on n'a pas tiré la boule numéro 1, donc, puisque tous les tirages sont indépendants,

$$P(A_0\,|\,B_i)=P(A_2)^{i-1}=\left(\frac{n-1}{n+k}\right)^{i-1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}P(A_0)&=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n+k}\right)^{i-1}\frac{k}{n+k}\\ &=\frac{k}{n+k}\cdot\frac{1}{1-\frac{n-1}{n+k}}=\frac{k}{k+1}.\end{aligned}$$

Version courte. La famille (A_1,A_2,A_3) forme clairement un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned}P(A_0)=P(A_0\,|\,A_1)\,P(A_1)+P(A_0\,|\,A_2)\,P(A_2)\\ +P(A_0\,|\,A_3)\,P(A_3).\end{aligned}$$

Tout aussi clairement, A_0 et A_1 sont incompatibles, donc $P(A_0\mid A_1)=0$. De même, si A_3 est réalisé, le jeu s'arrête et A_0 est réalisé, donc $P(A_0\,|\,A_3)=1$. Enfin, puisque les tirages sont indépendants, $P(A_0\,|\,A_2)=P(A_0)$. Alors

$$P(A_0)=P(A_0)\frac{n-1}{n+k}+\frac{k}{n+k}$$

d'où $P(A_0)=\dfrac{k}{k+1}$.

V — **AM**

Soient un espace vectoriel E, un vecteur X_0 non nul et une forme linéaire U non nulle. Considérons

$$f : X \mapsto U(X)\,X_0.$$

1. Montrer que $f \in \mathfrak{L}(E)$ et calculer son rang.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ f = f$. Calculer f^k.

. . . .

1. Soient X, Y dans E et λ dans $\mathbb{K}$. Comme U est linéaire,

$$\begin{aligned} f(X+\lambda Y) &= U(X+\lambda Y)\,X_0 \\ &= (U(X)+\lambda U(Y))\,X_0 \\ &= U(X)\,X_0 + \lambda U(Y)\,X_0 \\ &= f(X) + \lambda f(Y). \end{aligned}$$

En outre, $f(X) \in E$. Alors $f \in \mathfrak{L}(E)$.

Comme $U \neq 0$, il existe $X_1 \in E$ tel que $U(X_1) \neq 0$ donc $f(X_1) \neq 0$. Alors $f \neq 0$ et $\mathrm{rg}(f) \geqslant 1$. Mais pour tout $X \in E$, $f(X) \in \mathbb{K}\,X_0$, donc $\mathrm{Im}\,f \subset \mathbb{K}\,X_0$ et $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$. Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 1$.

2. Soit $X \in E$.

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= U(f(X))\,X_0 = U(U(X)\,X_0)\,X_0 \\ &= U(X)\,U(X_0)\,X_0. \end{aligned}$$

Si $f \circ f = f$, $f \circ f(X_1) = f(X_1)$. Et comme $U(X_1) \neq 0$, $U(X_0)\,X_0 = X_0$, donc $U(X_0) = 1$, car $X_0 \neq 0$.

Réciproquement, si $U(X_0) = 1$, clairement $f \circ f(X) = f(X)$ pour tout $X \in E$ donc $f \circ f = f$.

Finalement, la CNS recherché est $U(X_0) = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sans difficulté, en réitérant le calcul précédent, pour tout $X \in E$,

$$f^k(X) = U(X)\,(U(X_0))^{k-1}\,X_0.$$

VI — **CCP17**

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune trois boules noires ; l'urne U_1 contient en outre deux boules blanches et l'urne U_2 en contient quatre. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : on choisit une urne au hasard et on en tire une boule dont on note la couleur et que l'on remet dans l'urne choisie ; si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon, il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement B_n « la n^{e} boule tirée est blanche ». Calculer p_1, puis p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

. . . .

1. Considérons les évènements T_1 « pour le premier tirage, on choisit l'urne U_1 » et T_2 « pour le premier tirage, on choisit l'urne U_2 ». Sans autre précision de l'énoncé, considérons que les évènements T_1 et T_2 sont équiprobables. Ils forment clairement un système complet d'évènements. Alors, d'après les probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(B_1\,|\,T_1)\,P(T_1) + P(B_1\,|\,T_2)\,P(T_2).$$

Comme l'urne U_1 contient 5 boules, dont deux blanches, $P(B_1\,|\,T_1) = \frac{2}{5}$. De même, $P(B_1\,|\,T_2) = \frac{4}{7}$. Alors

$$p_1 = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{17}{35}.$$

2. Pour tout $n \geqslant 2$, considérons les évènements $T_{n,i}$ « pour le n^{e} tirage, on choisit l'urne U_i », où $i \in \{1,2\}$. Ils forment encore un système complet d'évènements. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_n &= P(B_n) \\ &= P(B_n\,|\,T_{n,1})\,P(T_{n,1}) + P(B_1\,|\,T_{n,2})\,P(T_{n,2}). \end{aligned}$$

De même que plus haut, $P(B_n \mid T_{n,1}) = \frac{2}{5}$ et $P(B_1 \mid T_{n,2}) = \frac{4}{7}$, puisque les urnes U_i sont les mêmes au n^{e} tirage qu'au premier. En outre, le choix de l'urne U_1 pour le n^{e} tirage résulte de l'obtention d'une boule blanche au tirage précédent, donc $P(T_{n,1}) = P(B_{n-1}) = p_{n-1}$ et $P(T_{n,2}) = P(\overline{B_{n-1}}) = 1 - p_{n-1}$. Ainsi,

$$p_n = \tfrac{2}{5}\,p_{n-1} + \tfrac{4}{7}\,(1-p_{n-1}) = -\tfrac{6}{35}\,p_{n-1} + \tfrac{4}{7}.$$

Ainsi, la suite (p_n) est arithmético-géométrique. Le point fixe ℓ de la fonction $x \mapsto -\frac{6}{35}\,x + \frac{4}{7}$ est $\ell = \frac{20}{41}$. En le retranchant à l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} p_n - \ell &= -\tfrac{6}{35}\,p_{n-1} + \tfrac{4}{7} - \ell \\ &= -\tfrac{6}{35}\,p_{n-1} + \tfrac{4}{7} - (-\tfrac{6}{35}\,\ell + \tfrac{4}{7}) \\ &= -\tfrac{6}{35}\,(p_{n-1} - \ell), \end{aligned}$$

donc la suite $(p_n - \ell)$ est géométrique et

$$p_n - \ell = (-\tfrac{6}{35})^{n-1}\,(p_1 - \ell) = (-\tfrac{6}{35})^{n-1}\,(-\tfrac{3}{1435}).$$

Finalement,

$$p_n = \tfrac{20}{41} + \tfrac{1}{82}\,(-\tfrac{6}{35})^n.$$