

Exercices de colles – cinquième semaine

I ————— CS

Deux intelligences artificielles A et B discutent en des temps discrets et disent oui, non ou peut-être. À l'étape n ,

- si A dit oui, B dit non,
- si A dit non, B dit non ou peut-être de manière équiprobable,
- si A dit peut-être, B dit oui, non ou peut-être de manière équiprobable,
- si B dit oui, A dit oui à l'étape $n + 1$,
- si B dit non, A dit non à l'étape $n + 1$,
- si B dit peut-être, A dit oui, non ou peut-être de manière équiprobable à l'étape $n + 1$.

En numérotant 1, 2 et 3 les réponses oui, non et peut-être, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons les événements

- $A_{i,n}$: « A dit la réponse i à l'étape n »,
- $B_{i,n}$: « B dit la réponse i à l'étape n »,

et leur probabilités respectives $a_{i,n}$ et $b_{i,n}$. Enfin, soient les colonnes U_n et V_n de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définies par

$$\begin{aligned} U_n^\top &= (a_{1,n} \ a_{2,n} \ a_{3,n}), \\ V_n^\top &= (b_{1,n} \ b_{2,n} \ b_{3,n}). \end{aligned}$$

1. Quelle relation existe-t-il entre U_{n+1} et U_n ? En déduire U_n en fonction de U_0 .

2. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle? Si oui, on note U sa limite.

3. Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements $A_{1,n}$, $A_{2,n}$ et $A_{3,n}$ forment un système complet, donc d'après les probabilités totales et l'énoncé,

$$\begin{aligned} b_{1,n} &= P(B_{1,n}) \\ &= P(B_{1,n} | A_{1,n}) P(A_{1,n}) \\ &\quad + P(B_{1,n} | A_{2,n}) P(A_{2,n}) \\ &\quad + P(B_{1,n} | A_{3,n}) P(A_{3,n}) \\ &= 0 \cdot a_{1,n} + 0 \cdot a_{2,n} + \frac{1}{3} a_{3,n}, \\ b_{2,n} &= 1 \cdot a_{1,n} + \frac{1}{2} a_{2,n} + \frac{1}{3} a_{3,n}, \\ b_{3,n} &= 0 \cdot a_{1,n} + \frac{1}{2} a_{2,n} + \frac{1}{3} a_{3,n}. \end{aligned}$$

Matriciellement, cela donne

$$V_n = \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ b_{2,n} \\ b_{3,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \end{pmatrix} = A U_n.$$

Sur le même principe,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ a_{3,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ b_{2,n} \\ b_{3,n} \end{pmatrix} = B V_n.$$

Donc

$$U_{n+1} = B A U_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} U_n = M U_n.$$

Alors, par une récurrence immédiate,

$$U_n = M^n U_0.$$

2. Pour étudier la limite de (U_n) , commençons par trouver les valeurs propres de M . Soit $x \in \mathbb{R}$. Un calcul rapide, qui commence par la somme de toutes les lignes, amène à

$$\chi_M(x) = (x - 1) \left(x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{18} \right).$$

Le trinôme admet deux racines complexes conjuguées λ et $\bar{\lambda}$. Alors il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $M = P D P^{-1}$ où $D = \text{diag}(1, \lambda, \bar{\lambda})$. Donc $M^n = P D^n P^{-1}$ où $D^n = \text{diag}(1, \lambda^n, \bar{\lambda}^n)$.

Par ailleurs, $\lambda \bar{\lambda} = \frac{1}{18}$ donc $|\lambda| < 1$. Alors $\lim_{+\infty} \lambda^n = \lim_{+\infty} \bar{\lambda}^n = 0$. Or la limite d'une suite de matrice se considère coefficient par coefficient, donc

$$\lim_{+\infty} D^n = \text{diag}(1, 0, 0) = \Delta.$$

Cela entraîne que

$$\lim_{+\infty} M^n = P \Delta P^{-1},$$

puis

$$\lim_{+\infty} U_n = P \Delta P^{-1} U_0 = U.$$

Comme λ et $\bar{\lambda}$ sont complexes, la détermination explicite de P est pénible. Cependant, en notant f l'endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à M , on constate que $f^n \rightarrow \delta$, où δ est l'endomorphisme canoniquement associé à $P \Delta P^{-1}$. En fait, la matrice de f dans une base de E constituée de vecteurs propres pour M est D et celle de δ est Δ . Or $\Delta^2 = \Delta$ et δ est clairement la projection sur $E_1(M)$ parallèlement à $E_\lambda(M) \oplus E_{\bar{\lambda}}(M)$. Cela entraîne que $U \in E_1(M)$ et il suffit de déterminer cet espace.

Un calcul sans grande difficulté donne

$$E_1(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme M et 1 sont réels, on peut se limiter à prendre les combinaisons linéaires réelles de ce vecteur. Alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$U = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mais à tout moment, les coordonnées de U_n représentent les probabilités d'un système complet d'événements, donc leur somme vaut 1. Alors, en passant à la limite, la somme des coordonnées de U vaut aussi 1 :

$$\alpha(4 + 16 + 3) = 1,$$

d'où $\alpha = \frac{1}{23}$ et

$$U = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Comme $V_n = A U_n$, la suite (V_n) converge vers

$$V = A U = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

II

CCP

Calculer la somme des séries

$$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - 1} \text{ et } \sum_{k \geq 1} \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k}.$$

.....
PREMIÈRE SOMME. Tout d'abord, $1/(k^2 - 1) \sim 1/k^2$ et la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge car $2 > 1$, donc $\sum 1/(k^2 - 1)$ converge. Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

SECONDE SOMME. Notons u_k le terme général de la seconde série. Comme les u_k sont positifs, la suite (S_n) des sommes partielles croît. Alors cette suite converge si et seulement si elle admet une suite extraite qui converge.

Examinons le terme général de la série. Soit un entier $k \geq 1$. Il existe un unique entier $p \geq 2$ tel que $(p-1)^2 \leq k < p^2$, donc $p-1 \leq \sqrt{k} < p$ et $[\sqrt{k}] = p-1$.

Si $(p-1)^2 \leq k < p^2 - 1$, alors $(p-1)^2 \leq k+1 < p^2$, donc $p-1 \leq \sqrt{k+1} < p$ et $[\sqrt{k+1}] = p-1$. Alors, $u_k = 0$. Mais si $k = p^2 - 1$, $k+1 = p^2$ donc $[\sqrt{k+1}] = p$ et $u_k = 1/(p^2 - 1)$.

Soit un entier $P \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} S_{P^2-1} &= \sum_{k=1}^{P^2-1} \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k} \\ &= \sum_{p=2}^P \frac{1}{p^2 - 1} \xrightarrow{P \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Alors, la suite extraite $(S_{P^2-1})_{P \in \mathbb{N}}$ de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc (S_n) converge. Ainsi, la seconde série converge et a pour somme

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k} = \frac{3}{4}.$$

III

ENS16

Soient deux réels $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes et à valeurs dans $[a, b]$ et notons S leur somme. L'objectif est de montrer que

$$\forall t > 0, P(S - E(S) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

Soient deux réels $s > 0$ et $t > 0$, et deux réels $c < d$ tels que $0 \in [c, d]$.

1. a. Soit φ une fonction réelle continue sur $[c, d]$, deux fois dérivables sur $]c, d[$. On suppose que $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$ et que $\varphi'' > 0$. Montrer que $\varphi < 0$ sur $]c, d[$.

b. Montrer que

$$\forall y \in [c, d], e^{sy} \leq \frac{c-y}{c-d} e^{sd} + \frac{y-d}{c-d} e^{sc}.$$

2. Soit une variable aléatoire Y d'espérance nulle et à valeurs dans $[c, d]$. Montrer que

$$\ln(E(e^{sY})) \leq \ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} - \frac{d}{c-d} e^{sc}\right),$$

puis que

$$E(e^{sY}) \leq \exp\left(\frac{s^2(d-c)^2}{8}\right).$$

On admettra que

$$\ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} - \frac{d}{c-d} e^{sc}\right) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}.$$

3. Montrer que

$$P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-st} \prod_{i=1}^n E(e^{s(X_i - E(X_i))}).$$

4. a. Montrer que

$$P(S - E(S) \geq t) \leq \exp\left(-st + n \frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$

b. Déterminer le minimum de ce majorant et conclure.

.....
PRÉAMBULE. Pour être dans le cadre du cours, on suppose naturellement les variables aléatoires réelles et discrètes. Si une telle variable aléatoire Z est bornée, $|Z|$ l'est aussi : autrement dit, $|Z|(\Omega)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure, disons M . Alors pour tout $z \in Z(\Omega)$, $|z| \leq M$ et

$$|z P(Z = z)| = |z| P(Z = z) \leq M P(Y = y).$$

Or la famille $(P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ est sommable, donc $(z P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ l'est aussi et Z est d'espérance finie.

1.a. Oui, car φ est strictement convexe sur $]c, d[$ et son graphe est donc strictement sous la corde horizontale qui relie les points $(c, 0)$ et $(d, 0)$.

1.b. Oui, car la fonction

$$\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto e^{sy} - \frac{c-y}{c-d} e^{sd} - \frac{y-d}{c-d} e^{sc}$$

vérifie les conditions de la question précédente : elle est évidemment de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[c, d]$; pour tout $y \in [c, d]$, $\varphi''(y) = s^2 e^{sy} > 0$; et bien-sûr, $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$.

2. Comme $Y \in [c, d]$, avec la question précédente,

$$e^{sY} \leq \frac{c-Y}{c-d} e^{sd} + \frac{Y-d}{c-d} e^{sc}.$$

Comme Y est bornée, e^{sY} l'est aussi et grâce au préambule, elle est d'espérance finie, tout comme Y . Sachant que Y est centrée et avec les propriétés de calcul sur les espérances, en particulier sa croissance,

$$\begin{aligned} E(e^{sY}) &\leq \frac{c - E(Y)}{c-d} e^{sd} + \frac{E(Y) - d}{c-d} e^{sc} \\ &= \frac{c}{c-d} e^{sd} - \frac{d}{c-d} e^{sc}. \end{aligned}$$

Comme $e^{sY} > 0$, $E(e^{sY}) > 0$ donc on peut appliquer le logarithme, qui est croissant :

$$\ln(E(e^{sY})) \leq \ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} - \frac{d}{c-d} e^{sc}\right).$$

Enfin, grâce à la majoration admise,

$$\ln(E(e^{sY})) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}$$

et en appliquant l'exponentielle, elle aussi croissante,

$$E(e^{sY}) \leq \exp\left(\frac{s^2(d-c)^2}{8}\right).$$

3. Avec le préambule, les X_i et S sont d'espérance finie. Considérons $Y = S - E(S)$. En termes d'événements, sachant que la fonction $y \mapsto e^{sy}$ est bijective et croissante,

$$(Y \geq t) = (e^{sY} \geq e^{st}),$$

donc

$$P(Y \geq t) = P(e^{sY} \geq e^{st}).$$

Comme $e^{sY} > 0$ et $e^{st} > 0$, grâce à l'inégalité de Markov,

$$P(e^{sY} \geq e^{st}) \leq \frac{E(e^{sY})}{e^{st}} = e^{-st} E(e^{sY}).$$

Or $S = \sum_{i=1}^n X_i$, donc

$$Y = S - E(S) = \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)).$$

Alors, grâce à l'indépendance des X_i , donc des $X_i - E(X_i)$,

$$\begin{aligned} E(e^{sY}) &= E\left(\exp\left(s \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right)\right) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^n e^{s(X_i - E(X_i))}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E(e^{s(X_i - E(X_i))}). \end{aligned}$$

Finalement,

$$P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-st} \prod_{i=1}^n E(e^{s(X_i - E(X_i))}).$$

4.a. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $Y_i = X_i - E(X_i)$. Comme $X_i \in [a, b]$, $Y_i \in [c, d]$ où $c = a - E(X_i)$ et $d = b - E(X_i)$. On a bien $c < d$ car $a < b$, et $0 \in [c, d]$ car $a \leq E(X_i) \leq b$. Et bien-sûr, $E(Y_i) = 0$.

Avec la question 2,

$$E(e^{s(X_i - E(X_i))}) = E(e^{sY_i}) \leq \exp\left(\frac{s^2(d-c)^2}{8}\right).$$

Mais $d - c = b - a$, donc avec la question 3,

$$\begin{aligned} P(S - E(S) \geq t) &\leq e^{-st} \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right) \\ &= \exp\left(-st + n \frac{s^2(b-a)^2}{8}\right). \end{aligned}$$

4.b. On a

$$\begin{aligned} -st + n \frac{s^2(b-a)^2}{8} &= \frac{n(b-a)^2}{8} \left(s^2 - \frac{8t}{n(b-a)^2} s\right) \\ &= \frac{n(b-a)^2}{8} \left[\left(s - \frac{4t}{n(b-a)^2}\right)^2 - \frac{16t^2}{n^2(b-a)^4}\right] \\ &\geq \frac{n(b-a)^2}{8} \left[-\frac{16t^2}{n^2(b-a)^4}\right] = -\frac{2t^2}{n(b-a)^2}. \end{aligned}$$

Pour $s = \frac{4t}{n(b-a)^2}$, ce minorant est atteint, donc pour ce même s ,

$$P(S - E(S) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right),$$

ce que l'on voulait.

BONUS. Prouvons la majoration admise par l'énoncé :

$$\ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} - \frac{d}{c-d} e^{sc}\right) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}.$$

Tout d'abord, si $c = 0$ ou $d = 0$, l'inégalité est évidente car le logarithme est nul. Supposons dorénavant que $c < 0 < d$. Pour alléger légèrement les écritures, posons $\delta = d - c > 0$.

Commençons par introduire la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(s) = \frac{c}{c-d} e^{sd} - \frac{d}{c-d} e^{sc} = \frac{1}{\delta} (-ce^{sd} + de^{sc}).$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour $s \geq 0$,

$$f'(s) = -\frac{cd}{\delta} (e^{sd} - e^{sc}) \geq 0,$$

car $c < d$ donc $e^{sd} - e^{sc} \geq 0$, et $c < 0 < d$ donc $-cd > 0$. Alors f croît. Or $f(0) = 1$, donc $f(s) \geq 1$.

Il s'ensuit que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(s) = \ln(f(s)) = \ln(-ce^{sd} + de^{sc}) - \ln \delta$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$. De plus,

$$g'(s) = -cd \frac{e^{sd} - e^{sc}}{-ce^{sd} + de^{sc}}.$$

Où l'on voit que $g(0) = \ln(f(0)) = 0$ et $g'(0) = 0$. Alors d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à g sur $[0, s]$, sachant que $g(s) \geq 0$,

$$|g(s) - g(0) - g'(0)s| = g(s) \leq \frac{s^2}{2!} \sup_{[0,s]} |g''|.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g''(s) &= -cd \left[\frac{(de^{sd} - ce^{sc})(-ce^{sd} + de^{sc})}{(-ce^{sd} + de^{sc})^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-cd(e^{sd} - e^{sc})^2}{(-ce^{sd} + de^{sc})^2} \right] \\ &= -cd \frac{e^{sc} e^{sd} (c^2 + d^2 - 2cd)}{(-ce^{sd} + de^{sc})^2} \\ &= -cd \frac{e^{sc} e^{s(c+\delta)} (d-c)^2}{(-ce^{s(c+\delta)} + de^{sc})^2} \\ &= -cd \delta^2 \frac{e^{2sc} e^{s\delta}}{e^{2sc} (-ce^{s\delta} + d)^2} \\ &= d \delta^2 \frac{-ce^{s\delta}}{(-ce^{s\delta} + d)^2} = d \delta^2 h(-ce^{s\delta}), \end{aligned}$$

en posant, pour $x \geq 0$,

$$h(x) = \frac{x}{(x+d)^2}.$$

La fonction h est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$h'(x) = \frac{d-x}{(x+d)^3}.$$

Clairement, $h'(d) = 0$, h croît sur $[0, d]$ et décroît sur $[d, +\infty[$. Comme $h(0) = 0$ et que h tend vers 0 en $+\infty$, h atteint son maximum en d , lequel vaut

$$h(d) = \frac{1}{4d}.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq h(x) \leq \frac{1}{4d},$$

donc pour tout $s \geq 0$,

$$0 \leq g''(s) \leq \frac{\delta^2}{4}.$$

Finalement, en revenant à l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$g(s) \leq \frac{s^2}{2} \frac{\delta^2}{4},$$

c'est-à-dire

$$\ln\left(\frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{d}{c-d}e^{sc}\right) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8},$$

ce que l'on voulait démontrer.

IV ————— ENS

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} - \frac{a}{2n} \right)$.

CONVERGENCE. Le terme général u_n garde manifestement un signe constant.

Si $a \neq 1$, $u_n \sim (1-a)/(2n)$, donc $\sum u_n$ diverge.

Si $a = 1$, $u_n \sim 1/(4n^2)$, donc $\sum u_n$ converge.

CALCUL DE LA SOMME. Voici deux méthodes.

Calcul direct. On ne peut pas séparer la somme de la série en une somme de plusieurs séries, car celles auxquelles on pense divergent. Alors, tentons d'évaluer les sommes partielles. Soit N un entier.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} \right) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{p=0}^{3N-1} \frac{1}{2p+1} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{2p} \\ &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=N+1}^{3N-1} \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme vu en cours, quand N tend vers $+\infty$, la première somme tend vers

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Notons S_N la seconde somme. Pour l'évaluer, utilisons une comparaison avec des intégrales. Comme la fonction $t \mapsto 1/(2t+1)$ décroît sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{2t+1} \leq \frac{1}{2n+1} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{2t+1}$$

donc, en additionnant membre à membre,

$$\begin{aligned} \int_{N+1}^{3N} \frac{dt}{2t+1} &\leq \sum_{n=N+1}^{3N-1} \frac{1}{2n+1} \leq \int_N^{3N-1} \frac{dt}{2t+1} \\ \iff \frac{1}{2} \ln\left(\frac{6N+1}{2N+3}\right) &\leq S_N \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{6N-1}{2N+1}\right). \end{aligned}$$

Alors, $\lim S_N = \frac{1}{2} \ln 3$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

Utilisation d'une série de fonctions. L'idée est d'introduire une série de fonctions de somme f de sorte que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = f(1)$. Par exemple, soit

$$f_n : x \mapsto \frac{x^{6n-5}}{6n-5} + \frac{x^{6n-3}}{6n-3} + \frac{x^{6n-1}}{6n-1} - \frac{x^{6n}}{2n}.$$

Commentaires. Le choix de la fonction f_n est tout à fait arbitraire, mais il est dicté par le fait que l'on désire exprimer f à l'aide des fonctions usuelles sans trop de difficultés. En outre, comme le but est de comprendre ce qui se passe au voisinage de 1, on se contente d'étudier la convergence sur $[0, 1]$.

Pour tout x de $I = [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= x^{6n-6}(1+x^2+x^4-3x^5) \\ &= x^{6n-6}(1-x)(1+x+2x^2+2x^3+3x^4); \end{aligned}$$

où l'on voit que $f'_n \geq 0$ sur I , donc f_n est croissante et positive et $\|f_n\|_\infty^I = f_n(1) = u_n$. Or $\sum u_n$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement sur I et sa somme f est continue sur I .

Calculons une expression de f à l'aide des fonctions usuelles. Soit N un entier. Pour tout x de I ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N f_n(x) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{x^{6n-5}}{6n-5} + \frac{x^{6n-3}}{6n-3} + \frac{x^{6n-1}}{6n-1} \right) - \sum_{n=1}^N \frac{x^{6n}}{2n} \\ &= \sum_{p=0}^{3N-1} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{x^{6n}}{n}. \end{aligned}$$

On reconnaît les débuts de deux séries entières usuelles de rayon de convergence 1, donc pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \ln(1-x^6) \\ &= \frac{1}{2} \ln((1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)). \end{aligned}$$

Comme f est continue en 1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3.$$