Exercices de colles – sixième semaine

I WP

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

.....
Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 9)$. Poursuivons les calculs dans $\mathbb{C}$. On a $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{3, 3i, -3i\}$ et on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E_{3i}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne fait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{3i}(A)$, $AX = 3iX$ donc en conjuguant, $A\bar{X} = -3i\bar{X}$ et $\bar{X} \in E_{-3i}(A)$. Alors

$$E_{-3i}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II MP15

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants. Montrer que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}_n\right) \leq \exp\left(-\sum_{n \in \mathbb{N}} P(E_n)\right).$$

.....
Comme les évènements E_n sont mutuellement indépendants, les $\bar{E}_n$ le sont aussi, et l'on aimerait dire

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}_n\right) = \prod_{n \in \mathbb{N}} P(\bar{E}_n).$$

Malheureusement, la notion de produit infini n'est pas au programme, donc cette approche est exclue.

En revanche, d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k\right).$$

En effet, la suite $(\bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{k=0}^{n+1} \bar{E}_k = \left(\bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k\right) \cap E_{n+1} \subset \bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k.$$

Et l'on peut bien affirmer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k\right) = \prod_{k=0}^n P(\bar{E}_k),$$

grâce à la mutuelle indépendance évoquée plus haut.

De plus, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(\bar{E}_k) = 1 - P(E_k) \leq \exp(-P(E_k)).$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geq 1 - x$ par convexité. Ainsi,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n P(\bar{E}_k) &\leq \prod_{k=0}^n \exp(-P(E_k)) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=0}^n P(E_k)\right). \end{aligned}$$

Si l'on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} P(E_n)$ converge,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sum_{k=0}^n P(E_k) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} P(E_n),$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}_n\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\sum_{k=0}^n P(E_k)\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n \in \mathbb{N}} P(E_n)\right), \end{aligned}$$

ce que l'on voulait.

Si l'on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} P(E_n)$ diverge, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(E_k) \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sum_{k=0}^n P(E_k) = -\infty.$$

Grâce à la limite de l'exponentielle en $-\infty$, on a donc

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}_n\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n \bar{E}_k\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\sum_{k=0}^n P(E_k)\right) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}_n\right) = 0.$$

On obtient à nouveau ce que l'on voulait, en écrivant

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(E_n) = +\infty$$

et $\exp(-\infty) = 0$.

III WP

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

.....

Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = (\lambda + 1)(2 - \lambda)(\lambda - 3)$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2, 3\}$. Et l'on trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_3(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

IV ————— **CS**

Dans une urne, on place b boules blanches et b boules noires. Lorsque l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches dans l'urne. On note A_n l'évènement « on a tiré une boule blanche lors des n premiers tirages » et on pose $p_n = P(A_n)$. Montrer que $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$, puis donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

.....
 PRÉLIMINAIRES. L'énoncé n'est pas forcément très clair. Il s'agit de tirages avec remise, et même beaucoup de remises puisqu'on rajoute des boules parfois, en supposant bien-sûr que $a > 0$. Ensuite, l'évènement A_n considère que l'on tire des boules blanches à chaque fois lors des n premiers tirages.

RELATION DE RÉCURRENCE. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\bar{A}_n)P(\bar{A}_n).$$

Comme on ne peut avoir $n+1$ fois une boule blanche sans en avoir déjà tiré une à chaque fois sur les n premiers tirages, $P(A_{n+1}|\bar{A}_n) = 0$. Ensuite, quand on a tiré n fois une boule blanche, à chaque fois on rajoute a boules, donc au $(n+1)^{\text{e}}$ tirage, il y a dans l'urne $b+an$ boules blanches et donc $2b+an$ boules. Alors $P(A_{n+1}|A_n) = \frac{b+an}{2b+an}$. Et l'on obtient la relation attendue : $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$.

LIMITE. Tout d'abord, on voit que $p_{n+1}/p_n < 1$, donc la suite (p_n) décroît strictement. Comme elle est naturellement bornée, elle converge.

Ensuite, avec le logarithme,

$$\begin{aligned} \ln p_{n+1} - \ln p_n &= \ln(b+an) - \ln(2b+an) \\ &= \ln\left(1 + \frac{b}{an}\right) - \ln\left(1 + \frac{2b}{an}\right) \\ &= \frac{b}{an} - \frac{2b}{an} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{b}{an}. \end{aligned}$$

Comme la série harmonique diverge, la série $\sum (\ln p_{n+1} - \ln p_n)$ diverge, donc la suite $(\ln p_n)$ diverge. Or elle décroît, par croissance du logarithme et décroissance de (p_n) , donc elle tend vers $-\infty$. Il s'ensuit que (p_n) tend vers 0, puisque $p_n = e^{\ln p_n}$ et par composition de limites.

V ————— **WP**

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -7 & -10 & -7 \end{pmatrix}.$$

.....
 Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = \lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda)$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Et l'on trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_1(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

VI —————

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes : si l'appareil fonctionne à la date n , il a la probabilité a d'être en panne à la date $n+1$; s'il est en panne à la date n , il a la probabilité b d'être en panne à la date $n+1$. On suppose $(a, b) \neq (0, 1)$ et on note p_n la probabilité que l'appareil fonctionne à l'instant n .

1. Trouver une relation entre p_n et p_{n+1} .
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
3. Étudier la convergence de la suite (p_n) .

.....
 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'évènement F_n : « l'appareil fonctionne à la date n ».

On a $P(\bar{F}_{n+1}|F_n) = a$ et $P(\bar{F}_{n+1}|\bar{F}_n) = b$. Comme $(F_n, \bar{F}_n)$ forme un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(F_{n+1}) \\ &= P(F_{n+1}|F_n)P(F_n) + P(F_{n+1}|\bar{F}_n)P(\bar{F}_n) \\ &= (1-a)p_n + (1-b)(1-p_n) \\ &= 1-b + (b-a)p_n. \end{aligned}$$

2. Donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Cherchons ℓ tel que $\ell = 1-b + (b-a)\ell$. Comme $(a, b) \neq (0, 1)$, $b-a \neq 1$ et

$$\ell = \frac{1-b}{1-b+a}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de ℓ ,

$$\begin{aligned} p_{n+1} - \ell &= 1-b + (b-a)p_n - (1-b + (b-a)\ell) \\ &= (b-a)(p_n - \ell). \end{aligned}$$

La suite $(p_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $b-a$, donc $p_n - \ell = (b-a)^n (p_0 - \ell)$.

3. Sachant que a et b sont des probabilités (conditionnelles), $(a, b) \in [0, 1]^2$ et $|b-a| \leq 1$.

Si $a = 1$ et $b = 0$, $b-a = -1$ et la suite géométrique $(p_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

Sinon, comme $b-a \neq 1$, on a $|b-a| < 1$ et la suite $(p_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .