Exercices de colles – septième semaine

I ————— **WP**

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

.....
Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 9)$. Poursuivons les calculs dans $\mathbb{C}$. On a $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{3, 3i, -3i\}$ et on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E_{3i}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne fait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{3i}(A)$, $AX = 3iX$ donc en conjuguant, $A\bar{X} = -3i\bar{X}$ et $\bar{X} \in E_{-3i}(A)$. Alors

$$E_{-3i}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $D = 3 \text{diag}(1, i, -i)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & i & -i \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II ————— **III**

Calculer le déterminant et la trace de

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^T.$$

.....
Notons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On voit que $\Phi^2 = \text{id}_E$, donc Φ est une symétrie. Ses sous-espaces propres sont $\text{Ker}(\Phi - \text{id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, et $\text{Ker}(\Phi + \text{id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques. De plus, on sait que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, χ_{Φ} est scindé sur $\mathbb{R}$, $\text{Sp}(\Phi) = \{-1, 1\}$, et on a les multiplicités

$$m(1) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1) \\ \text{et } m(-1) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

De plus,

$$\det(\Phi) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(\Phi)} \lambda^{m(\lambda)} = (-1)^{n(n-1)/2}, \\ \text{Tr}(\Phi) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\Phi)} \lambda m(\lambda) = n.$$

III ————— **WP**

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -7 & -10 & -7 \end{pmatrix}$.

.....
Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = \lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda)$ donc

$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Et l'on trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{et } E_1(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-1, 0, 1)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

IV ————— **CCP**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$, et soit l'application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est linéaire et donner son noyau.
2. Donner ses éléments propres.

.....
1. Comme la trace est linéaire, f est un endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\text{Tr}(A) \neq 0$, $A \neq 0$, donc si $M \in \text{Ker } f$, $\text{Tr}(M) = 0$. Réciproquement, si $\text{Tr}(M) = 0$, $f(M) = 0$. Ainsi, $\text{Ker } f = \text{Ker } \text{Tr}$.

2. Comme $\text{Ker } f \neq \{0\}$, $0 \in \text{Sp}(f)$. En outre, $A \neq 0$ et $f(A) = \text{Tr}(A)A$, donc $\text{Tr}(A) \in \text{Sp}(f)$. C'est bien une autre valeur propre car $\text{Tr}(A) \neq 0$. Comme $\text{Ker } f$ est un hyperplan et que $A \notin \text{Ker } f$, $E = \text{Ker } \text{Tr} \oplus \mathbb{C}A = E_0(f) \oplus E_{\text{Tr}(A)}(f)$. Donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

V ————— **WP**

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

.....
Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = (\lambda + 1)(2 - \lambda)(\lambda - 3)$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2, 3\}$. Et l'on trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \text{et } E_3(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-1, 2, 3)$ et

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

VI ————— **MP**

Avec le moins de calculs possibles, déterminer les éléments propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

.....
 Si $(a, b) = (0, 0)$, M est nulle et l'on connaît ses éléments propres.

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, les deux colonnes de M sont égales et non nulles, donc $\text{rg}(M) = 1 < 2$. Alors $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$. De plus, la différence des colonnes est nulle, d'où $E_0(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Voici deux approches de la suite.

PREMIÈRE APPROCHE. On a $\text{Im}(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Si $a + b = 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M)$. Alors il ne peut y avoir

d'autre valeur propre que 0, sinon l'autre espace propre serait inclus dans $\text{Im}(M) = E_0(M)$, ce qui est impossible car les espaces propres sont indépendants.

Si $a + b \neq 0$, comme $\text{Im}(M)$ est stable par M , c'est donc un espace propre associé à une valeur propre non nulle, λ . Et pour finir, $\text{Tr}(M) = 0 + \lambda = a + b$ d'où $\lambda = a + b$.

DEUXIÈME APPROCHE. Le polynôme caractéristique χ_M admet une racine réelle. Comme il est de degré 2, il est scindé et, en notant λ l'autre valeur propre (qui peut être 0), $\text{Tr}(M) = 0 + \lambda$. Ainsi, $\lambda = a + b$. Si $a + b = 0$, il n'y a pas d'autre valeur propre. Sinon, on termine quand-même par un léger calcul. On voit que $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, donc $E_{a+b}(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.