Exercices de colles – neuvième semaine

I ————— CCP18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ telles que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{k}.$$

Trouver la loi de la variable aléatoire N définie par

$$N = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 = \dots = X_n = 1, \\ \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid X_k = 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

.....
D'abord, $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Dire que $N = 0$ signifie que les X_k valent tous 1, donc en termes d'évènements,

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 1).$$

Puisque les X_k sont indépendantes, on peut dire que

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = 1)\right) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k = 1) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dire que $N = k$ signifie que les X_j valent 1 si $j < k$, puis $X_k = 0$, et les valeurs suivantes n'importent pas, donc

$$(N = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = 1)\right) \cap (X_k = 0),$$

et, toujours grâce à l'indépendance des X_k ,

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = 1)\right) P(X_k = 0) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{k-1}{k!}. \end{aligned}$$

II ————— CCP18

On observe un élément radioactif pendant un certain temps. Il émet des particules, dites particules β . On note N la variable aléatoire qui dénombre les particules β émises et on admet que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N = n) = \frac{2^n}{e^2 n!}.$$

Chaque particule β a une probabilité p d'être efficace, indépendamment des autres. On note X la variable aléatoire qui dénombre les particules β efficaces.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$.

2. En déduire la loi marginale de X puis son espérance.

.....
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons réalisé l'évènement $(N = n)$. Sachant que chacune des n particules β émise est efficace indépendamment des autres, le nombre de celles qui le sont suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

2. D'abord, $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille des évènements $(N = n)$ où $n \in \mathbb{N}$ forme un système complet donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k \mid N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k \mid N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{2^n}{e^2 n!} \\ &= e^{-2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{p^k (1-p)^{n-k} 2^k 2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-2} \frac{(2p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(2(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-2} \frac{(2p)^k}{k!} e^{2(1-p)} = e^{-2p} \frac{(2p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X = k) \\ &= e^{-2p} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{(2p)^k}{k!} \\ &= e^{-2p} 2p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2p)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-2p} 2p e^{2p} = 2p. \end{aligned}$$

III —————

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X \geq n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(X = n \mid X \geq n).$$

1. a) Vérifier que $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y .

2. Dans le cas général, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k),$$

puis exprimer $p_n = P(X = n)$ en fonction des x_k .

3. Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n > 0$.

1.a. Comme $P(Y = n) \sim 1/n^2$, $\sum P(Y = n)$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N P(Y = n) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$, et l'on a bien une loi de probabilité d'après le cours.

1.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P(Y \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Y = n | Y \geq n) &= \frac{P(Y = n, Y \geq n)}{P(Y \geq n)} \\ &= \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$1 - x_k = 1 - P(X = k | X \geq k) = P(\overline{X = k} | X \geq k),$$

car la probabilité conditionnelle sachant $(X \geq k)$ est une probabilité. Donc

$$\begin{aligned} 1 - x_k &= P(X \neq k | X \geq k) \\ &= \frac{P(X \neq k, X \geq k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X \geq k+1)}{P(X \geq k)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(X \geq k+1)}{P(X \geq k)} \\ &= \frac{P(X \geq n)}{P(X \geq 0)} = P(X \geq n). \end{aligned}$$

D'après un calcul de la question 1.b,

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X = n, X \geq n) \\ &= P(X = n | X \geq n) P(X \geq n) \\ &= x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k). \end{aligned}$$

Bien-sûr par convention, si $n = 0$, le produit vaut 1.

3. Supposons que X admette un taux de panne constant, noté a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a$ et

$$P(X = n) = a \prod_{k=0}^{n-1} (1 - a) = a(1 - a)^n.$$

On voit que forcément $a \in]0, 1[$. Et l'on reconnaît qu'alors $X + 1 \sim \mathcal{G}(a)$.

Réciproquement, si $X + 1 \sim \mathcal{G}(a)$, on vérifie sans peine que le taux de panne de X vaut a .

Commentaire. Le décalage de 1 vient de ce qu'une variable qui suit la loi géométrique prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et l'énoncé considère que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.